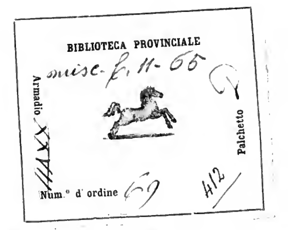
42

ALLÈGRET

CALCUL DES QUATERNIONS

N. 1


FONDO PIZZOFALCONE


BIBLIOTECA PROVINCIALE
misc. C. 11-65
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine

ESSAI

SUR LE

CALCUL DES QUATERNIONS

DE M. W. HAMILTON,

PAR **M. ALLÉGRET,**

DOCTEUR ÈS SCIENCES DE LA FACULTÉ DE PARIS.



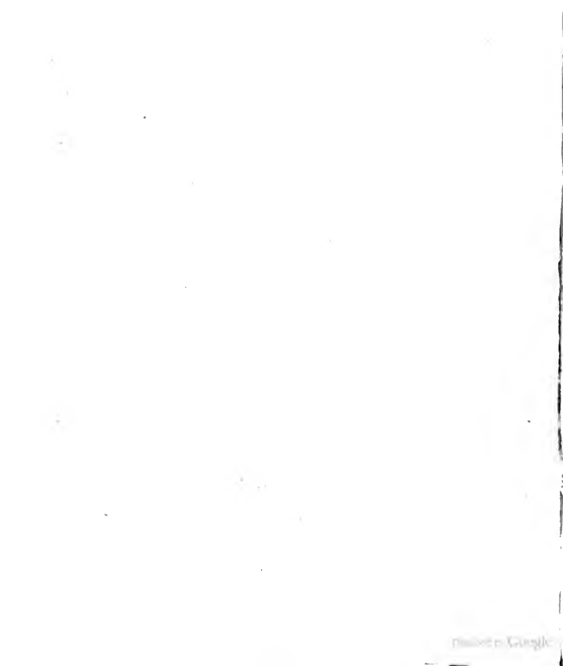
PARIS

LEIBER, LIBRAIRE ÉDITEUR,

RUE DE SEINE, 13.

1862





A LA MÉMOIRE

D'ISIDORE GEOFFROY SAINT-HILAIRE,

Hommage reconnaissant.



INTRODUCTION.

Je me suis proposé d'examiner, dans cet essai, les principes d'un nouveau genre d'analyse, imaginé par l'illustre astronome irlandais M. W. Hamilton, et nommé par lui le *calcul des quaternions*. L'idée de ce travail, dont l'origine est déjà un peu ancienne, m'a été suggérée par l'étude du dernier ouvrage de cet auteur : *Lectures on quaternions* (Dublin, 1853), dans lequel se trouvent résumés la plupart des travaux antérieurs publiés par lui sur ce sujet. Comme les applications de cette théorie sont susceptibles d'une grande extension et embrassent, pour ainsi dire, toutes les branches de l'analyse, je me suis contenté de l'appliquer ici à quelques questions géométriques, qui suffisent pour montrer l'esprit de la méthode. Il y a un certain intérêt à retrouver ainsi, par la seule force de ce nouveau calcul, des résultats connus; et cet exercice ne me semble pas, comme on pourrait le craindre, sans utilité pour la science, qui gagne

toujours, on le sait, au rapprochement qui se fait naturellement entre des méthodes différentes employées vers un même but.

Le calcul des quaternions présente une belle et curieuse extension à l'étendue à trois dimensions d'une représentation géométrique des expressions imaginaires, par des droites situées dans un même plan, dont on s'est beaucoup occupé dans ces derniers temps. Mais on peut aussi le concevoir comme une application particulière d'un autre plus général que j'appellerai le *calcul des symboles* et qui consiste à introduire dans l'analyse les symboles comme de véritables quantités, sous la condition de ne pas faire varier l'ordre dans lequel ils se présentent comme facteurs d'un produit. On les fait ensuite disparaître du calcul à l'aide d'un système de substitutions convenablement choisies qui ne laissent apercevoir en dernier lieu que des relations entre des quantités ordinaires. C'est ainsi que, dès l'origine du calcul différentiel, on a imaginé de considérer dans certains cas le signe des différences comme un facteur symbolique, et qu'on a été conduit à des formules très-remarquables dont M. Cauchy a beaucoup étendu l'emploi. Je présente ici sous ce point de vue la théorie du calcul de M. Hamilton, dont j'ai cru devoir, en raison de sa nouveauté, reprendre entièrement l'exposition. Je l'ai fait d'ailleurs très-succinctement, en supprimant toutes les considérations philosophiques ingénieuses et intéressantes qui s'y rattachent, et pour lesquelles je ne puis mieux faire que de renvoyer aux écrits de l'inventeur.

Je crois cependant avoir montré tout ce qui se rapporte d'une manière essentielle à ce calcul, et j'ai conservé scrupuleusement

toutes les notations introduites par M. Hamilton dans son dernier ouvrage.

Ce mémoire est partagé en trois sections.

La première contient l'exposition des règles du calcul des quaternions.

Dans la seconde je fais connaître, d'après M. Hamilton, l'interprétation géométrique remarquable que reçoivent les symboles employés. Cette section est terminée par l'examen d'un grand nombre d'identités utiles à connaître, à cause de leur emploi fréquent dans toute l'analyse, et qui se rattachent aussi en quelques points à la théorie des déterminants du second et du troisième ordre.

La troisième et dernière section est consacrée aux applications du nouveau calcul à quelques points de la théorie générale des lignes et des surfaces courbes.

ERRATA.

Page 2, 6e ligne en remontant, au lieu de « nous obtiendrions, » il faut lire : *on obtiendra.*

Page 12, ligne 2, changer p et q l'un dans l'autre.

SECTION PREMIÈRE.



DES RÈGLES PRINCIPALES DU CALCUL DES QUATERNIONS.

1. Nous désignerons par i, j et k, trois symboles particuliers dont nous ferons constamment nsage et dont nous fixerons plus loin le sens et les diverses transformations. En les considérant d'abord comme de simples quantités algébriques, on pourrait former avec enx des polynomes dont le plus simple est évidemment celui qui serait linéaire par rapport anx symboles et dont la forme générale est

$$p = a + bi + cj + dk,$$

où a, b, c et d désignent des quantités algébriques quelconques indépendantes des symboles i, j et k.

Ce qnadrinome fondamental et irréductible p est ce qne nous appellerons désormais un *quaternion*, sous la réserve des conventions particulières relatives aux symboles qne nons ferons bientôt connaître.

2. Le premier terme a dn polynome précédent constitue ce que nous appellerous la *partie algébrique* du quaternion. Nons le désignerons sonvent, pour abréger, par la caractéristique spéciale S placée devant le quaternion complet, en sorte qu'on aura

$$\mathrm{S}p = a.$$

Lorsqu'on retranche du quaternion cette partie, il se réduit à un trinome entièrement symbolique qui constitue ce que nous appellerons la *partie symbolique* de ce quaternion, que nous désignerons aussi doréna-

vant par la caractéristique spéciale V, placée devant le quaternion complet, en sorte qu'on aura

$$\mathrm{V}p = bi + cj + dk,$$

et par suite

$$p = \mathrm{S}p + \mathrm{V}p.$$

Nous appellerons les quatres termes irréductibles, a, bi, cj et dk, les *parties constituantes* du quaternion.

3. Nous conviendrons que deux quaternions ne peuvent être égaux que s'ils sont composés identiquement des mêmes parties constituantes, et bien qu'on ne puisse encore attacher aucune idée précise de grandeur à l'expression d'un quaternion, tel qu'il vient d'être défini, on conçoit facilement que les règles du calcul algébrique relatives à l'addition et à la soustraction sont applicables à des polynomes de cette espèce et donnent toujours comme résultat un autre polynome de même forme. Ainsi en désignant par p et q deux quaternions définis par les égalités

$$\begin{aligned} p &= a + bi + cj + dk, \\ q &= a' + b'i + c'j + d'k, \end{aligned}$$

on aura

$$p \pm q = (a \pm a') + (b \pm b')i + (c \pm c')j + (d \pm d')k.$$

On opérerait de même dans le cas où on aurait à combiner entre eux, par voie d'addition et de soustraction, un nombre quelconque de quaternions.

4. Étudions maintenant et tout d'abord le cas de la multiplication de deux quaternions, qui va être pour nous l'occasion de faire connaître les règles fondamentales et de poser les bases du calcul actuel. Si l'on effectue la multiplication des deux quaternions précédents p et q, d'après la règle ordinaire et en se bornant à prendre la précaution de ne pas intervertir l'ordre dans lequel les symboles se présentent comme facteurs, nous obtiendrions les deux identités suivantes, dont les seconds membres sont du second degré par rapport aux symboles

$$\begin{array}{llllllll} pq = & aa' & + (ab' + ba')i & & + (ac' + ca')j & & + (ad' + da')k & \\ & + bb'i^2 & + & cd'\,jk & + & db'\,ki & + & bc'\,ij \\ & + cc'j^2 & + & dc'\,kj & + & bd'\,ik & + & cb'\,ji \\ & + dd'k^2 & & & & & & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{lllll} qp = & aa' & +(ab'+ba')i & +(ac'+ca')j & +(ad'+da')k \\ & +bb'i^2 & + \quad dc'\,jk & + \quad bd'\,ki & + \quad cb'\,ij \\ & +cc'j^2 & + \quad cd'\,kj & + \quad db'\,ik & + \quad bc'\,ji \\ & +dd'k^2. & & & \end{array}$$

On voit que les deux produits ne sont pas de forme identique, et qu'on ne peut pas écrire, au point de vue où nous nous plaçons,

$$pq = qp.$$

La différence des deux produits sera le polynome symbolique du second degré suivant :

$$pq - qp = (cd' - dc')\ (jk - kj) + (db' - bd')\ (ki - ik) + (bc' - cb')\ (ij - ji).$$

5. Pour simplifier l'expression du produit précédent et le ramener à la forme linéaire, nous conviendrons désormais de faire dans ce produit, sur les termes du second degré par rapport aux symboles, les substitutions suivantes, qui sont celles que M. Hamilton a le premier imaginées :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad ij = -ji = k.$$

A l'aide de ce système de substitutions, les produits précédents se ramèneront à la forme normale, quadrinome et linéaire :

$$\begin{aligned} pq = aa' - bb' - cc' - dd' &+ \Big\{(ab' + ba') + (cd' - dc')\Big\}\,i \\ &+ \Big\{(ac' + ca') + (db' - bd')\Big\}\,j \\ &+ \Big\{(ad' + da' + (bc' - cb')\Big\}\,k \\ qp = aa' - bb' - cc' - dd' &+ \Big\{(ab' + ba') - (cd' - dc')\Big\}\,i \\ &+ \Big\{(ac' + ca') - db' - bd')\Big\}\,j \\ &+ \Big\{(ad' + da') - (bc' - cb')\Big\}\,k \end{aligned}$$

La comparaison de ces produits montre qu'ils ne sont pas en général

identiques, et fournit les relations

$$Spq = Sqp = aa' - bb' - cc' - dd'$$
$$Vpq = \left\{(ab' + ba') + cd' - dc'\right\} i + \left\{(ac' + ca') + (db' - bd')\right\} j + \left\{ad' + da') + (bc' - cb')\right\} k$$
$$Vqp = \left\{(ab' + ba') - (cd' - dc')\right\} i + \left\{(ac' + ca') - (db' - bd')\right\} j + \left\{(ad' + da') - (bc' - cb')\right\} k$$
$$pq - qp = Vpq - Vqp = 2\left\{(cd' - dc')i + (db' - bd')j + (bc' - cb')k\right\}.$$

6. Supposons, comme cela arrivera fréquemment dans les applications, que les quaternions facteurs soient entièrement symboliques, ce qui revient à poser dans les formules précédentes

$$a = a' = 0,$$

et désignons les deux nouveaux facteurs symboliques par les lettres α et β, en sorte qu'on ait

$$\alpha = bi + cj + dk$$
$$\beta = b'i + c'j + d'k,$$

les identités précédentes deviendront

$$S\alpha\beta = S\beta\alpha = -bb' - cc' - dd'$$
$$V\alpha\beta = -V\beta\alpha = (cd' - dc')i + (db' - bd')j + (bc' - cb')k.$$

Remarquons, en outre, qu'on aura généralement :

$$2S\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\alpha \quad \text{et} \quad V(\alpha\beta + \beta\alpha) = 0$$
$$2V\alpha\beta = \alpha\beta - \beta\alpha \qquad S(\alpha\beta - \beta\alpha) = 0.$$

7. Pour obtenir le produit d'un nombre quelconque de quaternions, on peut procéder de deux manières différentes. En considérant le produit à effectuer comme le résultat de plusieurs produits successifs de deux facteurs, auxquels s'appliquent les réductions précédentes, on arriverait facilement à un dernier quaternion comme produit final. Mais on peut aussi suivre une autre marche qui consiste à former le produit symbolique complet de tous les facteurs donnés, ayant, par rapport aux symboles, un degré

égal au nombre des facteurs. On ne fait d'abord aucune réduction sur les symboles, ni aucune inversion dans leur ordre, puis on passe du produit symbolique au produit définitif, en calculant la valeur de chacun des produits composés uniquement de symboles pris comme facteurs, ces divers produits auront d'ailleurs nécessairement l'une des huit valeurs simples

$$\pm 1, \quad \pm i, \ \pm j \quad \text{ou} \quad \pm k.$$

Par suite le produit définitif se ramènera immédiatement à la forme normale linéaire.

8. Considérons, pour éclaircir cette dernière méthode par un exemple, le cas où le nombre des facteurs serait égal à trois ; les divers produits du troisième degré, formés avec les symboles et qui sont évidemment les seuls dont la valeur ait besoin d'être connue, seront compris parmi les vingt-sept suivants :

$$\begin{array}{ccc}
i^3 & j^3 & k^3 \\
ij^2, \ ik^2 & jk^2, \ ji^2 & ki^2, \ kj^2 \\
j^2i, \ k^2i & k^2j, \ i^2j & i^2k, \ j^2k \\
jij, \ kik & kjk, \ iji & iki, \ jkj \\
ijk, \ ikj & jki, \ jik & kij, \ kji.
\end{array}$$

Il est facile de reconnaître que ces produits donnent lieu aux substitutions numériques correspondantes

$$\begin{array}{ccc}
-i & -j & -k \\
-i, \ -i & -j, \ -j & -k, \ -k \\
-i, \ -i & -j, \ -j & -k, \ -k \\
+i, \ +i & +j, \ +j & +k, \ +k \\
-1, \ +1 & -1, \ +1 & -1, \ +1
\end{array}$$

qui permettront de déterminer la valeur d'un produit quelconque de trois quaternions.

9. L'examen des substitutions précédentes conduit à une remarque importante dans la théorie actuelle, savoir que l'un quelconque des produits de trois symboles conserve toujours sa valeur, quand on substitue au produit de deux symboles consécutifs sa valeur fournie par les substi-

substitutions fondamentales du n° 5. Ainsi on a par exemple

$$\begin{aligned} ji^2 &= ji.i = -ki = j.i^2 = -j \\ ikj &= ik.j = -jj = i.kj = -i.i = +1, \end{aligned}$$

etc., etc.

Cette remarque s'étend d'ailleurs au produit d'un nombre quelconque de symboles. Ainsi on aura

$$ijkik = i.jk.ik$$

parce qu'on a, d'après ce qui précède,

$$\ldots\ldots\; ik = \ldots\ldots\; (ik)$$

et

$$\ldots\ldots\; jk = \ldots\ldots\; (jk).$$

les points indiquant des symboles facteurs en nombre quelconque. On aura donc

$$ijkik = i(jk)\,(ik) = ii(-j) = -(ii)j = j\,;$$

on aurait pu grouper autrement les facteurs et écrire dans le cas actuel

$$ijkik = (ij)k\,(ik) = k^2(ik) = -(ik) = j.$$

On peut dire plus généralement encore qu'un produit d'un nombre quelconque de symboles conserve sa valeur, si l'on substitue à la place de plusieurs facteurs consécutifs le facteur unique qui leur est équivalent. C'est ainsi qu'on a, par exemple,

$$jijkijkkjkj = (jij)k\,(ij)k\,(kjk)j = ikkkjj = ik = -j.$$

10. Il est visible maintenant que la remarque que nous venons de faire s'étend au produit d'un nombre quelconque de quaternions même. Ainsi si p, q et r désignent trois quaternions, on aura

$$pqr = pq.r = p.qr.$$

En effet, en effectuant les multiplications algébriques, telles qu'elles sont indiquées, les termes des trois produits finals ne différeront les uns des autres que par la manière dont sont obtenus les produits purement symboliques qui y entrent; or ces produits étant composés des mêmes facteurs disposés dans un même ordre, donnent lieu, d'après le numéro



précédent, aux mêmes substitutions; par suite ces divers produits seront identiques. Cette conclusion est d'ailleurs générale et s'étend d'elle-même à un nombre quelconque de facteurs.

11. Lorsque deux quaternions ont une même partie algébrique et deux parties symboliques égales et de signe contraire, on dit qu'ils sont *conjugués* l'un de l'autre, et le produit de ces deux quaternions a pour valeur la somme des carrés des quatre coefficients numériques qui entrent dans chacun d'eux; c'est ce qui résulte de l'identité immédiate

$$(a+bi+cj+dk)\ (a-bi-cj-dk)=a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Nous désignerons désormais le quaternion conjugué de p par la notation $\mathrm{K}p$, et nous observerons que le produit de deux quaternions conjugués est indépendant de l'ordre dans lequel on les multiplie entre eux, en sorte qu'on a toujours, conformément à notre nouvelle notation,

$$p\mathrm{K}p=\mathrm{K}p.p.$$

12. Le quaternion conjugué du produit de deux quaternions p et q est égal au produit des conjugués de ces facteurs multipliés dans un ordre inverse, en sorte qu'on a

$$\mathrm{K}pq=\mathrm{K}q\mathrm{K}p.$$

En effet, en conservant les notations du n° 5, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}p &= a - bi - cj - dk \\
\mathrm{K}q &= a' - b'i - c'j - d'k \\
\mathrm{K}pq &= aa' - bb' - cc' - dd' - (ab' + ba' + cd' - dc')i \\
&\qquad - (ac' + ca' + db' - bd')j \\
&\qquad - (ad' + da' + bc' - cb')k.
\end{aligned}$$

Si l'on change dans la seconde des formules du n° 5 les signes de b, c, d, b', c' et d', on obtiendra donc le produit

$$\mathrm{K}q\ \mathrm{K}p$$

et l'on vérifiera immédiatement que ce produit équivaut à celui qui précède et qui représente le conjugué du quaternion pq, donné par la première des formules du même article.

Ce théorème s'étend sans difficulté à un nombre quelconque de facteurs,

et l'on aura généralement

$$Kpqr = KrKqKp.$$

Si les quaternions étaient privés de leur premier terme et réduits à leur partie symbolique α, β, γ, δ.... λ, leurs conjugués seraient $-\alpha$, $-\beta$, ..., $-\lambda$, et l'on aurait par suite

$$K(\alpha\beta\ .....\ \lambda) = \pm\lambda\ .....\ \beta\alpha$$

en prenant dans le second membre le signe $+$ ou le signe $-$, selon que le nombre des facteurs est pair ou impair.

13. Nous appellerons module d'un qnaternion et nous désignerons par la notation T placée devant ce quaternion, la racine carrée de la somme des carrés précédents ; nous aurons donc

$$Tp = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{pKp} = \sqrt{Kp.p}$$

en désignant toujours par p le qnaternion

$$p = a + bi + cj + dk.$$

14. Le quotient du quaternion p par son module Tp, donne un nouveau quaternion dont le modnle est l'unité. Nous appellerons un tel qnaternion, une *unité* et nons la désignerons par la notation U, placée devant le quaternion dont elle dérive ; ainsi l'on aura

$$Up = \frac{a}{Tp} + \frac{b}{Tp}i + \frac{c}{Tp}j + \frac{d}{Tp}k.$$

le nombre de ces sortes d'nnités est évidemment illimité ; mais leur considération est très-utile, comme on le verra bientôt.

15. Démontrons maintenant que le module du produit de plusienrs quaternions est égal au produit des modules des facteurs.

Si ce théorème était démontré pour le cas de denx facteurs, il est visible qu'il s'étendrait immédiatement au cas d'un nombre quelconque de facteurs. Or si l'on désigne par p et q les deux quaternions

$$p = a + bi + cj + dk$$
$$q = a' + b'i + c'j + d'k,$$

on aura (n° 5)

$$(\mathrm{T}pq)^2 = (aa' - bb' - cc' - dd')^2 + (ab' + ba' + cd' - dc')^2 + (ac' + ca' + db' - bd')^2 + (ad' + da' + bc' - cb')^2$$

d'où l'on déduit, en vertu d'une identité bien connue et due, je crois, à Euler,

$$(\mathrm{T}pq)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) = (\mathrm{T}p)^2 (\mathrm{T}q)^2$$

et par suite

$$\mathrm{T}pq = \mathrm{T}p\mathrm{T}q,$$

ce qui démontre le théorème énoncé. Mais voici une autre démonstration fondée sur la remarque du n° 12.

On a en effet, d'après ce numéro

$$pq\mathrm{K}pq = pq\mathrm{K}q\mathrm{K}p = p.q\mathrm{K}q.\mathrm{K}p.$$

Or les deux produits $q\mathrm{K}q$ et $p\mathrm{K}p$ sont algébriques et égaux chacun au carré des modules de q et de p. On a donc

$$pq\mathrm{K}pq = (\mathrm{T}p)^2 (\mathrm{T}q)^2,$$

et par suite

$$\mathrm{T}pq = \mathrm{T}p\mathrm{T}q,$$

ce qu'il fallait démontrer.

16. On voit, d'après cela, que le produit d'un nombre quelconque d'unités de quaternion aura toujours un module égal à l'unité et par suite sera une nouvelle unité. Ce qui donne lieu à la formule

$$\mathrm{U}pqr = \mathrm{U}p\mathrm{U}q\mathrm{U}r.$$

17. Il importe de faire dès maintenant une nouvelle remarque importante, quoique d'ailleurs évidente : c'est que pour multiplier entre elles deux sommes de quaternions, il sera permis d'opérer par la règle ordinaire de la multiplication algébrique, en observant avec soin de ne pas intervertir l'ordre des facteurs. Ainsi on aura sans réduction

$$(p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2$$
$$(p+q+r)^2 = p^2 + q^2 + r^2 + pq + qp + qr + rq + rp + pr.$$

Lorsque les quaternions ne se présentent pas sous leur forme complète,

les formules précédents et d'autres analogues sont susceptibles de réduction. Ainsi si α, β, γ... représentent des trinomes symboliques ou des quaternions privés de leur premier terme, on trouvera sans difficulté

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta+\beta\alpha.$$

Or on a (n° 6)

$$\alpha\beta+\beta\alpha=2S\alpha\beta,$$

donc

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2S\alpha\beta.$$

On trouverait de même

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2S\alpha\beta$$
$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2+\beta\alpha-\alpha\beta,$$

et comme on a (même numéro)

$$\beta\alpha-\alpha\beta=2V\beta\alpha=-2V\alpha\beta,$$

il vient

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2+2V\beta\alpha=\alpha^2-\beta^2-2V\beta\alpha.$$

Cette formule se décompose dans les deux suivantes :

$$S(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$$
$$V(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=2V\beta\alpha=-2V\alpha\beta.$$

On établirait avec le même facilité les formules suivantes qu'il est bon de noter :

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2S\alpha\beta+2S\beta\gamma+2S\gamma\alpha$$
$$(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\varkappa+\lambda)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots+\lambda^2+2S\alpha\beta+2S\beta\gamma+2S\alpha\gamma+\ldots+2S\varkappa\lambda.$$

18. La définition de la division présenterait quelque ambiguïté, si l'on se bornait à la présenter comme dans l'analyse ordinaire. On peut montrer en effet qu'il existe en général deux quaternions différents, qui, multipliés par un quaternion donné, produiseut un autre quaternion également donné, pourvu que la multiplication se fasse dans les deux cas dans un ordre différent. Pour démontrer cette proposition, j'observe d'abord qu'il y a toujours un seul quaternion qui, multiplié par un autre quaternion donné, donne l'unité pour produit, ou ce qui revient au même, qu'à un quaternion quelconque correspond toujours un seul quaternion qui lui soit inverse. Soit par exemple :

$$p=a+ci+bj+dk,$$

un quaternion donné et

$$\varpi = w + xi + yj + zk,$$

son inverse, en laissant les quantités w, x, y et z indéterminées, elles devront être de telle sorte qu'on ait (n° 5)

$$\begin{aligned} aw - bx - cy - dz &= 1 \\ bw + ax - dy + cz &= 0 \\ cw + dx + ay - bz &= 0 \\ dw - cx + by + az &= 0 \end{aligned}$$

on a encore

$$\begin{aligned} aw - bx - cy - dz &= 1 \\ bw + ax + dy - cz &= 0 \\ cw - dx + ay + bz &= 0 \\ dw + cx - by + az &= 0. \end{aligned}$$

Or il est facile de reconnaître que ces deux systèmes sont identiques et donnent pour les inconnues les valeurs

$$w = \frac{a}{(\mathrm{T}p)^2}, \quad x = \frac{-b}{(\mathrm{T}p)^2}, \quad y = \frac{-c}{(\mathrm{T}p)^2}, \quad z = \frac{-d}{(\mathrm{T}p)^2}$$

qui sont précisément les mêmes que celles que fournit immédiatement la considération du quaternion $\mathrm{K}p$ conjugué de p.

19. Cela posé, si l'on demande maintenant de trouver un quaternion r qui, multiplié par un quaternion donné p, donne comme produit un autre quaternion donné q, le problème admettra les deux solutions distinctes

$$r_1 = q\varpi \quad \text{et} \quad r_2 = \varpi q,$$

ϖ représentant le quaternion inverse du diviseur p, ou p^{-1}. Pour faire disparaître toute ambiguïté dans le choix de ces deux quotients, il suffira de fixer la place qu'il occupe par rapport au diviseur dans le produit qui donne le dividende. Mais on fait disparaître toute difficulté, en introduisant la considération du quaternion inverse du diviseur, que nous désignerons dorénavant par ce quaternion affecté de l'exposant -1, ou encore sous forme de fraction dont le numérateur exprimé ou sous-entendu est $+1$; et les deux quotients écrits plus haut s'exprimeront respec-

tivement par la notation

$$r_1 = pq^{-1} = \frac{p}{q} = p \cdot \frac{1}{q}$$

et

$$r_2 = p^{-1}q = \frac{1}{p}q.$$

20. Lorsque les quatre facteurs numériques a, b, c et d, qui entrent dans l'expression du quaternion

$$p = a + bi + cj + dk$$

sont réels, on peut mettre ce quaternion sous une forme remarquable, que nous allons faire connaître, et qui conduit à une généralisation de la célèbre formule de Moivre, si utile dans l'analyse ordinaire.

Posons pour cela

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{a}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{c^2 + d^2}}{b} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{d}{c},$$

il viendra

$$p = \mathrm{T}p \left\{ \cos \theta + \sin \theta \, (\cos \varphi i + \sin \varphi \cos \psi j + \sin \varphi \sin \psi k) \right\}.$$

On voit que de cette manière le quaternion p est exprimé à l'aide de quatre nouvelles quantités. Ce sont le *module* et les trois angles θ, φ et ψ; nous les appellerons les éléments de ce quaternion.

Le premier de ces angles θ sera dit l'*angle principal* et les deux autres, les *angles directeurs* ou encore la *colatitude* et la *longitude* du quaternion. On verra dans la suite la raison de ces nouvelles dénominations.

21. Supposons maintenant qu'on ait le second quaternion

$$p' = a' + m\,(bi + cj + dk)$$

satisfaisant à la condition

$$\mathrm{V}p' = m\,\mathrm{V}p,$$

m étant une quantité algébrique ou numérique quelconque. L'angle principal θ' de ce quaternion sera donné par la formule

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{m\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{a'} = \frac{m}{a} \operatorname{tg} \theta$$

et l'on aura

$$p' = Tp' \left[\cos\theta' + \sin\theta' \left\{ \cos\varphi i + \sin\varphi \cos\psi j + \sin\varphi \sin\psi k \right\} \right]$$

les angles directeurs du quaternion p' étant les mêmes que ceux de p. Le produit des deux quaternions p et p' jouit de la propriété de ne pas changer de valeur lorqu'on change l'ordre des facteurs, et conserve encore la même forme que les précédents, c'est-à-dire les mêmes éléments directeurs; il est donné par la formule remarquable

$$pp' = Tp \left(\cos\theta + \sin\theta\,[\alpha]\right) Tp' \left(\cos\theta' + \sin\theta'\,[\alpha]\right) = TpTp' \left(\cos(\theta+\theta') + \sin(\theta+\theta')\,[\alpha]\right)$$

dans laquelle nous représentons pour abréger par $[\alpha]$ le trinome symbolique

$$\cos\varphi i + \sin\varphi \cos\psi j + \sin\varphi \sin\psi k$$

que nous appellerons aussi le *trinome directeur* du quaternion.

Cette formule s'obtient facilement au moyen de celle du n° 5 qui donne le produit pq. En posant en effet, dans cette dernière,

$$\begin{aligned}
a &= \cos\theta \\
b &= \sin\theta \cos\varphi \\
c &= \sin\theta \sin\varphi \cos\psi \\
d &= \sin\theta \sin\varphi \sin\psi \\
a' &= \cos\theta' \\
b' &= \sin\theta' \cos\varphi \\
c' &= \sin\theta' \sin\varphi \cos\psi \\
d' &= \sin\theta' \sin\varphi \sin\psi
\end{aligned}$$

il viendra

$$Spq = \cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta' = \cos(\theta+\theta')$$

et

$$\begin{aligned}
Vpq &= (\cos\theta \sin\theta' + \cos\theta' \sin\theta) \cos\varphi i \\
&+ \left(\cos\theta \sin\theta' + \cos\theta' \sin\theta\right) \sin\varphi \cos\psi j \\
&+ \left(\cos\theta \sin\theta' + \cos\theta' \sin\theta\right) \sin\varphi \sin\psi k \\
&= \sin(\theta+\theta')\,[\alpha].
\end{aligned}$$

On aura donc

$$pq = \cos(\theta + \theta') + \sin(\theta + \theta')\,[\alpha]$$

et par suite l'expression précédente du produit pp'.

22. Cette formule nous permet d'exprimer toutes les puissances d'un quaternion, quelle que soit la valeur de l'exposant ; la marche à suivre sera identique à celle qui sert à établir la formule de Moivre, et l'on aura à faire la même discussion sur les valeurs multiples des radicaux. Le symbole $[\alpha]$ jouera ici le rôle de $\sqrt{-1}$ dans l'analyse ordinaire et nous obtiendrons ainsi la formule générale

$$p^m = (\mathrm{T}p)^m \left\{\cos m\theta + \sin m\theta\ [\alpha]\right\},$$

θ désignant l'angle principal du quaternion p mis sous la forme

$$p = a + bi + cj + dk = \mathrm{T}p(\cos\theta + \sin\theta\,[\alpha]),$$

en posant

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{a} \quad \text{et} \quad [\alpha] = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}(bi + cj + dk).$$

23. Après avoir examiné les diverses fonctions élémentaires qu'on peut former avec les quaternions, il nous reste à voir comment il est possible d'exprimer et de définir les fonctions transcendantes. La méthode la plus simple à cet effet me paraît être celle qui repose sur la considération des séries convergentes. Pour en donner une idée, nous l'appliquerons à l'étude de la fonction exponentielle e^p, où e représente comme à l'ordinaire la base des logarithmes népériens et p un quaternion quelconque. Dans le cas où p se réduit à une quantité purement algébrique, on sait qu'on a

$$e^p = 1 + \frac{p}{1} + \frac{p^2}{1.2} + \frac{p^3}{1.2.3} + \text{ etc.}$$

en prenant dans le second membre un nombre illimité de termes ou plutôt la limite vers laquelle tend cette série. Convenons qu'on mette au lieu de la quantité précédente un quaternion p, le second membre représentera une fonction transcendante de p que nous désignerons encore par la même notation e^p et que nous appellerons la *fonction exponentielle* de p.



Il est facile de s'assurer d'ailleurs que la série reste encore convergente et que la fonction e^p est bien définie. Car soit, comme plus haut,

$$p = a + bi + cj + dk = \mathrm{T}p\,(\cos\theta + \sin\theta\,[\alpha]),$$

la substitution de p dans la série donnera le même résultat que si l'on remplaçait p par la quantité algébrique imaginaire

$$\mathrm{T}p\,\left(\cos\theta + \sin\theta\,\sqrt{-1}\right),$$

d'où il résulte que si l'on pose

$$\chi = \mathrm{T}p \sin\theta,$$

χ désignant un nouvel angle, on aura

$$e^{a+bi+cj+dk} = e^p = e^{\mathrm{S}p}\,(\cos\chi + \sin\chi\,[\alpha]).$$

Telle est donc l'expressiou fort simple à laquelle on peut toujours ramener la fonction exponentielle. Elle se réduit, comme on voit, à un quaternion, ayant pour module l'exponentielle de la partie réelle du quaternion donné p, pour angle principal l'angle χ défini ci-dessus et ses deux autres angles directeurs égaux à ceux du même quaternion p.

24. Voyons maintenant à quoi se réduit la fonction inverse de la précédente. Pour cela remarquons qu'on a

$$e^p = e^{\mathrm{S}p} e^{\chi[\alpha]} = q$$

en représentant par q le quaternion équivalent à l'exponentielle e^p; d'où il résulte que si l'on appelle par analogie *logarithme* de q le quaternion p qui satisfait à l'équation précédente, dans laquelle on considère q comme donné, et qu'on désigne par la notation $p = \log q$ ce logarithme, on aura

$$\mathrm{S}p + (\chi + 2k\pi)\,[\alpha] = \log q,$$

k étant un nombre entier positif ou négatif quelconque et π le rapport de la circonférence au diamètre. On voit de plus que $\mathrm{S}p = \mathrm{S}\log q$ et que l'angle χ est égal à un multiple pair de π près à l'angle du quaternion q.

25. On conçoit que l'analogie qui existe entre le symbole $[\alpha]$ et l'imaginaire $\sqrt{-1}$ peut être poussée beaucoup plus loin. Supposons, en effet,

qu'on puisse définir sans ambiguïté, par un simple développement en série convergente dont les termes soient ordonnés par rapport aux diverses puissances entières de z, une fonction quelconque $F(z)$ de la variable imaginaire z, de telle sorte qu'on ait

$$F(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots\ldots + A_{-1} z^{-1} + A_{-2} z^{-2} + \ldots\ldots$$

les coefficients $A_0, A_1, A_2 \ldots A_1, A_2$ étant des quantités quelconques entièrement indépendantes de z, on aura le même développement en remplaçant z par un quaternion q et l'imaginaire $\sqrt{-1}$ qui entre dans z par le symbole $[\alpha]$. D'où il résulte que tous les beaux développements suivant les sinus et les cosinus d'un même arc qu'on rencontre fréquemment dans la physique mathématique et la mécanique céleste peuvent être étendus et appliqués au calcul des quaternions. Je n'insisterai pas pour le moment sur cette remarque dont on comprendra sans peine toute l'importance, et je me contenterai seulement d'en faire l'application à la célèbre formule du binome de Newton.

26. On sait, d'après un beau théorème de Cauchy, que la puissance $(1+z)^m$ est toujours, quel que soit l'exposant m, développable par la formule de Mac-Laurin en une série convergente ordonnée par rapport aux puissances croissantes de la variable imaginaire z, tant que le module de z est inférieur à l'unité. On a donc, sous cette condition,

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1} z + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \ldots\ldots$$

le second membre étant une série illimitée, quand on suppose, comme nous le faisons ici, que l'exposant m n'est pas un entier positif. Remplaçons maintenant z dans cette formule par un quaternion quelconque p dont le module Tp soit inférieur à l'unité et dont la partie symbolique, qui dépend uniquement des angles directeurs, soit représentée par $[\alpha]$, nous obtiendrons la suivante :

$$(1+p)^m = 1 + \frac{m}{1} p + \frac{m(m-1)}{1.2} p^2 + \ldots\ldots$$

En particulier, si l'on fait dans cette dernière $m = -\frac{1}{2}$ et $m = -\frac{3}{2}$, on



obtiendra les deux autres dérivées de la précédente

$$(1+p)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}p + \frac{1.3}{2.4}p^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}p^3 + \text{etc.}$$

$$(1+p)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{2}{3}p + \frac{3.5}{2.4}p^2 - \frac{3.5.7}{3.4.6}p^3 + \text{etc.}$$

Ces deux séries, dont la loi est évidente, trouvent lenr emploi dans le développement symbolique de la force perturbatrice du mouvement elliptique des planètes.

27. Lorsqu'on a à considérer des quaternions comme fonctions d'une quantité réelle, variable, analogue au temps, il faut, pour que cette fonction soit continne, que les parties constituantes du quaternion varient toutes d'une manière continue en même temps que la variable indépendante. Ainsi soit

$$p = w + xi + yj + zk,$$

un quaternion quelconque fonction continue d'une seule variable indépendante t, et Δt un accroissement quelconque fini de t; celui de p, Δp, qui y correspond, sera donné par la formule

$$\Delta p = \Delta w + \Delta xi + \Delta yj + \Delta zk,$$

dans le cas où le qnaternion p est continu, il y a lieu de considérer le quaternion dérivé de p, et on trouve immédiatement par la considération des limites, et en employant la notation connue

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dw}{dt} + \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k.$$

On obtiendrait de même toutes les dérivées successives d'ordre plus élevé, et, dans le cas où le quaternion p dépendrait de plnsieurs variables indépendantes, les diverses *dérivées partielles* de ce quaternion.

28. Parmi les diverses formules auxquelles conduit le calcul différentiel appliqué aux quaternions, nous en distinguerons d'abord quelques-unes d'une application fréquente, et par lesquelles nous terminerons les considérations préliminaires qui font l'objet de cette section.

Proposons-nous d'abord d'obtenir l'expression de la dérivée du

module du quaternion p. On aura cette suite d'identités

$$\frac{d\mathrm{T}p}{dt} = \frac{d\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}}{dt} = \frac{1}{\mathrm{T}p}\left(w\frac{dw}{dt}+x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{T}p}\,\mathrm{S}\frac{dp}{dt}\,\mathrm{K}p = \mathrm{T}p\,\mathrm{S}\frac{\frac{dp}{dt}}{p} = \mathrm{S}\frac{\frac{dp}{dt}}{\mathrm{U}p};$$

d'où on déduit

$$\frac{d\log\mathrm{T}p}{dt} = \mathrm{S}\frac{\frac{dp}{dt}}{p},$$

qui montre que la dérivée du logarithme (népérien) du module d'un quaternion a pour expression la partie algébrique S du quotient de la division de la dérivée du quaternion par le même quaternion.

29. La dérivée de l'unité d'un quaternion donne aussi lieu à une formule analogue. On a

$$\mathrm{T}p\mathrm{U}p = p;$$

d'où l'on tire en différenciant

$$d\mathrm{T}p\mathrm{U}p + d\mathrm{U}p\,.\,\mathrm{T}p = dp,$$

et en multipliant par l'inverse de p,

$$\frac{d\mathrm{T}p}{\mathrm{T}p} + \frac{d\mathrm{U}p}{\mathrm{U}p} = \frac{dp}{p}.$$

Or, d'après le numéro précédent

$$\frac{d\mathrm{T}p}{\mathrm{T}p} = \mathrm{S}\frac{dp}{p};$$

donc

$$\frac{d\mathrm{U}p}{\mathrm{U}p} = \frac{dp}{p} - \mathrm{S}\frac{dp}{p} = \mathrm{V}\frac{dp}{p}.$$

On voit, d'après cette formule, que le quotient de la dérivée de l'unité d'un quaternion divisée par cette unité équivaut à la partie symbolique V du quotient de la dérivée du quaternion divisée par le quaternion.

30. Si dans la différenciation du quaternion, exprimé en fonction de ses quatre éléments, les deux éléments directeurs étaient considérés comme

constants, on aurait, en désignant par θ l'angle principal du quaternion p et par $[\alpha]$ la fonction symbolique constante formée avec les éléments directeurs

$$\begin{aligned} \mathrm{U}p &= \cos\theta + \sin\theta\,[\alpha] \\ \theta\,[\alpha] &= \log \mathrm{U}p, \\ d\theta\,[\alpha] &= d \log \mathrm{U}p. \end{aligned}$$

Or, en différenciant la première de ces équations, il vient

$$d\mathrm{U}p = (-\sin\theta + \cos\theta\,[\alpha])\,d\theta = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)[\alpha]\right)d\theta\,;$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\mathrm{U}p}{\mathrm{U}p} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\,[\alpha]\right)d\theta = [\alpha]\,d\theta = d\log \mathrm{U}p.$$

De là, ce théorème analogue à celui du n° 28 : lorsque les seuls éléments variables d'un quaternion sont le module et l'angle principal, la différentielle du logarithme de son unité est entièrement symbolique et équivaut au quotient de la différentielle de l'unité du quaternion divisée par cette unité elle-même, et par suite, d'après le numéro précédent, à la partie symbolique du quotient de la dérivée du quaternion divisée par le quaternion.

31. La différentielle complète d'un quaternion quelconque peut donc toujours être mise sous la forme suivante :

$$dp = d\mathrm{T}p.\mathrm{U}p + \mathrm{T}p d\mathrm{U}p = \left(\mathrm{S}\frac{dp}{\mathrm{U}p} + \mathrm{V}\frac{dp}{\mathrm{U}p}\right)\mathrm{U}p = \left(\mathrm{S}\frac{dp}{p} + \mathrm{V}\frac{dp}{p}\right)p.$$

Ces dernières identités sont d'ailleurs évidentes, car on a

$$dp = dpp^{-1}p = dp(\mathrm{U}p)^{-1}(\mathrm{U}p),$$

ce qui donne immédiatement

$$dp = \left(\mathrm{S}\frac{dp}{p} + \mathrm{V}\frac{dp}{p}\right)p = \left(\mathrm{S}\frac{dp}{\mathrm{U}p} + \mathrm{V}\frac{dp}{\mathrm{U}p}\right)\mathrm{U}p.$$

Lorsque le quaternion p se réduit à un trinome symbolique

$$\alpha = xi + yj + zk,$$

on a

$$(U\alpha)^{-1} = - U\alpha,$$

et par suite

$$dT\alpha = - S\, d\alpha U\alpha,$$

$$dU\alpha = \frac{\alpha V(d\alpha.\alpha)}{(T\alpha)^2} \quad \text{et} \quad S(\alpha dU\alpha) = 0.$$

On aurait aussi

$$d\alpha = dT\alpha . U\alpha + T\alpha . dU\alpha = dT\alpha . U\alpha + \frac{\alpha V(d\alpha.\alpha)}{\overline{T\alpha}^2}.$$

Toutes ces dernières formules sont d'une application fréquente.

32. On peut aussi obtenir, par une opération inverse, un quaternion dont la dérivée ou la différentielle serait donnée, et ce problème revient évidemment, dans le cas simple où nous plaçons, à effectuer quatre quadratures sur les parties constituantes du quaternion donné. Ainsi, si ce dernier est toujours

$$p = w + xi + yj + zk,$$

et que t soit la variable indépendante, on aura

$$\int p dt = \int w dt + i \int x dt + j \int y dt + k \int z dt + c^{te}.$$

La constante étant ici un quaternion quelconque indépendant de t.

33. Il est bon de noter quelques cas d'intégration immédiate. Ainsi de la relation

$$\frac{dTp}{Tp} = S\frac{dp}{p},$$

ou

$$dTp = S\frac{dp}{Up},$$

On tire, en désignant par $f(Tp)$ une fonction quelconque du module de p,

$$f(Tp).dTp = S f(Tp) \frac{dp}{Up}.$$

Or, le premier membre étant une différentielle ordinaire par rapport à une seule variable, si on désigne par φ son intégrale en posant

$$\varphi(x) = \int fx dx,$$

l'équation précédente donnera par l'intégration

$$\int \mathrm{S} f(\mathrm{T}p)\frac{dp}{\mathrm{U}p} = \varphi(\mathrm{T}p) + \text{cons}^{\text{te}}.$$

Comme application de cette formule, supposons qu'on fasse

$$f(x) = x^n,$$

n étant un exposant quelconque, on aura

$$\int \mathrm{S}((\mathrm{T}p)^{n+1}.p^{-1}.dp) = \frac{(\mathrm{T}p)^{n+1}}{n+1} + \text{c}^{\text{te}},$$

dans le cas de $n = -1$, on a d'ailleurs (28)

$$\int \mathrm{S}\frac{dp}{p} = \log(\mathrm{T}p) + \text{c}^{\text{te}}.$$

34. On peut aussi, pour l'intégration, tirer quelquefois parti de l'équation

$$\frac{d\mathrm{U}p}{\mathrm{U}p} = \mathrm{V}\frac{dp}{p}.$$

Ainsi on voit que si l'on avait

$$\mathrm{V}\frac{dp}{p} = 0,$$

on aurait aussi

$$d\mathrm{U}p = 0,$$

et par suite

$$\mathrm{U}p = \text{cons}^{\text{te}}.$$

c'est-à-dire que le quaternion p aurait tous ses éléments constants, à l'exception de son module.

35. Supposons que le quaternion p soit réduit à sa partie symbolique et posons

$$\alpha = xi + yj + zk,$$

Nous aurons

$$d\mathrm{V}\alpha\frac{d\alpha}{dt} = \mathrm{V}\left(\alpha d\frac{d\alpha}{dt}\right).$$

En posant selon la notation ordinaire

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha' \quad \text{et} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha'',$$

l'équation précédente peut s'écrire

$$dV\alpha\alpha' = V\alpha\alpha''.dt.$$

On tire de là

$$\int V\alpha\alpha'' dt = V\alpha\alpha' + \beta,$$

β étant un trinome symbolique constant. On aurait de même, en désignant par γ un autre trinome indépendant de t,

$$\int S\gamma\alpha\alpha''.dt = S\gamma\alpha\alpha' + c^{te}.$$

Cette intégrale se déduit de l'identité précédente en en multipliant les deux membres par $S.\gamma$. On peut faire usage de ces dernières intégrales en dynamique pour obtenir immédiatement le principe des aires ou des moments.

Nous allons maintenant faire connaître l'interprétation que reçoivent les symboles actuels, et on verra que la plus grande partie des résultats que nous venons d'obtenir par le calcul ont une signification qui, ainsi que l'a montré M. Hamilton, permet de les retrouver par une voie entièrement différente et purement géométrique.

SECTION DEUXIÈME.

DE L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES SYMBOLES.

36. Nous avons vu (n° 20) qu'on peut exprimer algébriquement un quaternion donné quelconque par le produit de son module multiplié par une fonction de trois angles. Parmi ces quatre éléments de quaternion, les deux que nous avons appelés *directeurs* entrent seuls dans la partie symbolique de la fonction précédente et forment un trinôme, qui se réduit, comme il a été dit, à la forme

$$\frac{li + mj + nk}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \cos\varphi i + \sin\varphi \cos\psi j + \sin\varphi \sin\psi k = [\alpha]$$

et dont le module est égal à l'unité. Or on peut représenter ce trinôme, appelé aussi *directeur* (21), par le point de la sphère de rayon égal à un, qui aurait ces angles φ et ψ pour coordonnées polaires par rapport à un point fixe pris pour pôle. En traçant sur la sphère le grand cercle équateur correspondant à ce pôle, et en prenant dessus une origine quelconque pour les longitudes, le point dont il s'agit aurait une longitude égale à ψ et une latitude égale à $\frac{\pi}{2} - \varphi$: l'angle φ représentant ici la distance du point au pôle considéré, ou encore ce qu'on peut appeler la *colatitude* de ce point. Les trois symboles i, j et k correspondent eux-mêmes à trois points de la sphère éloignés l'un de l'autre d'un quadrant, savoir : i au pôle, j à l'origine des longitudes, et le dernier sym-

bole k au point de l'équateur, dont la longitude est égale à $\frac{\pi}{2}$. Si l'on joint le centre O de la sphère à ces trois points, ainsi qu'à celui qui est défini par le trinôme précédent $[\alpha]$, les projections de ce dernier rayon sur les trois premiers, considérés comme formant un système de trois axes coordonnés rectangulaires, seront

$$\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \quad \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \quad \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

ou encore

$$\cos\varphi,\ \sin\varphi\cos\psi \quad \text{et} \quad \sin\varphi\sin\psi,$$

et inversement ces projections définissent la position de ce point sur la sphère, ainsi que nous venons de le montrer.

37. Le même trinôme symbolique directeur $[\alpha]$ peut aussi servir à représenter un plan perpendiculaire au rayon précédent; l'angle φ désignerait alors l'inclinaison de ce plan sur l'équateur, et l'angle ψ l'angle que fait l'intersection du plan et de l'équateur avec le rayon correspondant au symbole k, de sorte qu'en prenant ce dernier point pour origine des longitudes, et en conservant les désignations en usage en astronomie, φ et ψ ne seraient autre chose que l'inclinaison et la longitude du nœud qui suffisent, comme on sait, à fixer la position du plan considéré.

Ainsi, on voit qu'en traçant sur la sphère un triangle tri-rectangle dont les sommets I, J et K correspondraient aux trois symboles i, j et k, un trinôme directeur quelconque, tel que

$$[\alpha] = \frac{li + mj + nk}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = \cos\varphi i + \sin\varphi\cos\psi j + \sin\varphi\sin\psi k$$

peut servir à représenter soit un point A de la sphère éloigné de I, de l'angle φ et tel que ψ est égal à la distance de J au cercle mené par AI, soit le grand cercle de la même sphère ayant A pour pôle, qui fait avec le cercle JK un angle égal à φ et dont l'intersection avec le même cercle JK est à une distance de K égale à l'angle ψ.

Nous conviendrons d'appeler *vecteur* le rayon OA, qui sert ainsi à représenter ou à définir le symbole $[\alpha]$; mais nous donnerons dans la suite une plus grande extension à cette dénomination, en désignant de ce nom



une longueur portée dans une direction arbitraire, dont les projections sur les axes auraient des valeurs quelconques l, m et n, et qui serait représentée par le trinome symbolique

$$li + mj + nk = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\,[\alpha],$$

de sorte que si $[\alpha]$ désigne le rayon OA de la sphère précédente, en portant sur ce rayon, prolongé s'il est nécessaire, à partir du centre O, une longueur OA' égale à $\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$, OA' sera le vecteur correspondant au dernier trinome.

38. Soit maintenant un second vecteur défini par les nouveaux angles directeurs, φ_1 et ψ_1, et correspondant au trinôme

$$\frac{1}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}(l_1 i + m_1 j + n_1 k) = \cos\varphi_1 i + \sin\varphi_1 \cos\psi_1 j + \sin\varphi_1 \sin\psi_1 k$$

que nous désignerons aussi pour abréger par $[\alpha_1]$. Le produit des deux trinomes $[\alpha]$ et $[\alpha_1]$ sera un quaternion p ayant un module égal à l'unité, et les deux parties Sp et Vp de ce quaternion auront les valeurs suivantes :

$$\mathrm{S}p = \mathrm{S}[\alpha][\alpha_1] = -\frac{(ll_1 + mm_1 + nn_1)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}} = -\cos\theta$$

$$\mathrm{V}p = \mathrm{V}[\alpha][\alpha_1] = \frac{(mn_1 - nm_1)i + (nl_1 - ln_1)j + (lm_1 - ml_1)k}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}} = \sin\theta\,[\beta]$$

en désignant par θ l'angle plus petit que π, que font entre eux les deux vecteurs $[\alpha]$ et $[\alpha_1]$, et par $[\beta]$ le vecteur-unité perpendiculaire à leur plan, mené de telle sorte qu'on puisse faire coïncider $[\alpha]$ avec $[\alpha_1]$ par une rotation directe autour de $[\beta]$ comme axe, égale à l'angle θ. Ces résultats simples se déduisent immédiatement de formules élémentaires très-connues. Remarquons qu'en changeant le signe du facteur $[\alpha_1]$ on obtient son inverse (nº 18), et que la multiplication précédente se transforme en une division. On aura donc aussi, en appelant q le quotient de la division de $[\alpha]$ par $[\alpha_1]$,

$$\mathrm{S}q = \mathrm{S}\frac{[\alpha]}{[\alpha_1]} = -\mathrm{S}[\alpha][\alpha_1] = \frac{ll_1 + mm_1 + nn_1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}} = \cos\theta$$

$$\mathrm{V}q = \mathrm{V}\frac{[\alpha]}{[\alpha_1]} = \mathrm{V}[\alpha_1][\alpha] = \frac{(m_1 n - n_1 m)i + (n_1 l - l_1 n)j + (l_1 m - m_1 l)k}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}$$

$$= -\sin\theta\,[\beta],$$

l'angle θ et le vecteur $[\beta]$ conservant la signification précédente. Nous sommes ainsi conduit à la règle suivante :

Le produit et le quotient de deux rayons de la sphère donnent deux quaternions égaux et de signe contraire. La partie algébrique du produit de ces vecteurs est égale à la projection de l'un d'eux sur le prolongement de l'autre, et la partie symbolique du même produit est égale à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs, multipliée par le trinome symbolique directeur correspondant au rayon perpendiculaire au plan de ce parallélogramme, et dirigé de telle sorte qu'une rotation moindre que π autour de ce rayon puisse amener, dans le sens direct, le multiplicande à coïncider avec le multiplicateur. Les deux parties du quotient des mêmes vecteurs sont par suite les mêmes que celles de leur produit changées de signe.

Ajoutons ici cette remarque importante et qui se déduit immédiatement des formules précédentes, à savoir : que le produit ou le quotient de deux vecteurs parallèles se réduit toujours à une quantité numérique, tandis que le produit ou le quotient de deux vecteurs perpendiculaires donne toujours un simple vecteur perpendiculaire au plan des premiers.

Nous confondrons désormais dans le langage, sans qu'il puisse en résulter d'équivoque, les opérations faites sur les trinomes symboliques avec les opérations analogues effectuées sur les vecteurs correspondants.

39. Il est visible maintenant qu'on peut considérer toute unité de quaternion Up comme le produit ou le quotient de deux vecteurs. En effet, si l'on appelle θ l'angle du quaternion, cette unité sera de la forme

$$Up = \cos\theta + \sin\theta\,[\beta],$$

$[\beta]$ étant le vecteur défini par les deux angles directeurs du quaternion p; or si l'on mène dans le plan du grand cercle de la sphère perpendiculaire au vecteur $[\beta]$ deux rayons $[\alpha]$ et $[\alpha_1]$ faisant entre eux un angle égal à θ, et tels qu'on puisse appliquer $[\alpha_1]$ sur $[\alpha]$ par une rotation dans le sens direct égale à θ autour de l'axe $[\beta]$, d'après ce qui vient d'être dit le quaternion Up sera égal au quotient de $[\alpha]$ divisé par $[\alpha_1]$, ou, ce qui revient au même, égal au produit du premier vecteur par le vecteur opposé au second.

On peut mieux se représenter ce résultat en traçant sur la sphère un arc de grand cercle AA_1 égal à θ et ayant pour pôle le point B, extrémité du vecteur [β], de telle sorte que le chemin AA_1 soit décrit sur la sphère d'un mouvement direct par rapport à ce pôle, en allant de A_1 à A, ou d'un mouvement rétrograde en allant au contraire de A à A_1. Cet arc AA_1 déterminera donc par ses extrémités A et A_1 le rayon dividende et le rayon diviseur, dont la division donne pour quotient le quaternion U*p*. Il est évident de plus que cet arc est susceptible de glisser à volonté sur son cercle et de prendre toutes les positions possibles sans que la valeur du quaternion quotient, représenté par cet arc, soit altérée.

40. Outre cette représentation géométrique des unités de quaternion, au moyen des arcs de grand cercle d'une même sphère, on peut encore en imaginer une seconde, non moins simple, qui lui est réciproque. Pour cela, décrivons de chacune des extrémités de l'arc AA_1, comme pôles, deux arcs de grand cercle; ils se couperont au point B et détermineront par leur intersection l'angle sphérique CBC_1, dont la grandeur sera bien déterminée et égale à θ ou à l'arc AA_1, et dont les côtés, susceptibles d'ailleurs de prendre une infinité de positions différentes autour du sommet B, seront placés de telle sorte qu'on aille dans un sens direct ou dans un sens rétrograde de C_1 à C ou de C à C_1 dans l'intérieur de cet angle. Remarquons de plus que si l'on prolonge les côtés de cet angle, ils se couperont en un second point B_1, opposé au premier B suivant un diamètre, et formeront un fuseau complet CBC_1B_1 compris entre deux demi-cercles, lequel représentera encore le même quaternion, soit qu'on prenne B ou B_1 pour sommet de l'angle, pourvu que le sens qui amènerait l'un de ces demi-cercles sur l'autre, pour décrire le fuseau, soit toujours direct de C_1 à C ou rétrograde de C à C_1. Le vecteur qui correspond au sommet B ou au pôle de l'arc représentatif AA_1 du quaternion, et dont la considération est, comme on voit, importante, s'appelle l'*axe* du quaternion, de même que l'arc AA_1 s'appelle l'*arc* de ce quaternion.

41. Il est maintenant facile de donner la signification géométrique du produit de deux, et par suite d'un nombre quelconque de quaternions unités. Nous sommes même ainsi conduit à deux résultats de forme différente et d'égale simplicité, selon que les quaternions facteurs sont repré-

sentés par des arcs de cercle ou par des angles sphériques. En premier lieu, pour effectuer la multiplication de deux quaternions, p et q, donnés par leurs arcs, imaginons qu'on construise un triangle sphérique ABC tel que les deux arcs BC et CA représentent et définissent les deux quaternions facteurs p et q; il est évident que la construction de ce triangle sera toujours possible, à cause de la faculté qu'on a de déplacer à volonté sur chaque cercle l'origine de l'arc représentatif d'un même quaternion. Désignons maintenant par $[\alpha]$, $[\beta]$ et $[\gamma]$ les trois vecteurs correspondant aux sommets de ce triangle, on aura, d'après ce qui précède,

$$p=\frac{[\beta]}{[\gamma]},\quad q=\frac{[\gamma]}{[\alpha]};$$

donc le produit $r=pq$ sera (nº 10)

$$r=pq=\frac{[\beta]}{[\gamma]}\cdot\frac{[\gamma]}{[\alpha]}=\frac{[\beta]}{[\alpha]},$$

et par suite, l'arc représentatif du quaternion r sera le côté BA du triangle sphérique actuel ABC.

On déterminerait de même le produit du quaternion précédent par un troisième facteur s et ainsi de suite, et l'on arriverait toujours, en suivant cette marche, à un dernier arc qui représentera le produit cherché.

42. Supposons en second lieu que les facteurs quaternions soient donnés comme des angles ou des fuseaux sphériques, et commençons d'abord par déterminer, comme précédemment, le produit de deux quaternions. Pour cela imaginons qu'on construise les arcs représentatifs de ces quaternions, et à leur aide, comme ci-dessus, le triangle sphérique ABC dont le côté BA serait l'arc correspondant au produit cherché. Déterminons ensuite sur la même sphère le triangle sphérique polaire A'B'C' du triangle ABC, dont les sommets A', B' et C' soient respectivement les pôles des arcs BC, CA et AB, il est évident que les deux quaternions facteurs p et q seront représentés par les angles extérieurs du triangle polaire dont les sommets sont en A' et en B', et que le quaternion produit r le sera aussi par le troisième angle extérieur ayant son sommet en C'. On peut représenter les divers sens de ces angles en employant

trois lettres pour désigner chaque angle, ainsi qu'il suit :

$$p = C'A'B'.$$
$$q = A'B'C',$$
$$r = pq = A'C'B'.$$

Le sens rétrograde étant encore ici indiqué en allant de la première lettre à la dernière, ou plutôt du cercle représenté par les deux premières, à celui qui est représenté par les deux dernières, en faisant tourner autour de chaque sommet suivant l'angle extérieur correspondant du triangle.

On aurait pu évidemment construire immédiatement le triangle A'B'C' sans passer par le triangle auxiliaire ABC, et l'on arriverait au même résultat, en faisant bien attention au sens respectif de chaque angle. Il est visible que cette construction s'étend, comme la précédente, à un nombre quelconque de quaternions donnés.

43. Nous allons faire quelques applications bien simples des théorèmes précédents. Considérons en premier lieu deux triangles sphériques ABC et AB_1C_1 qui aient un angle commun en A compris entre des côtés égaux chacun à chacun et situés dans le prolongement l'un de l'autre. Désignons par p et q les quaternions représentés par les arcs AB et BC du premier triangle, on aura (n° 41)

$$pq = AB\,.\,BC = AC = C_1A$$

et

$$C_1A\,.\,AB_1 = C_1B_1 = pqp^{-1}.$$

Ainsi l'arc C_1B_1 représente un quaternion obtenu en multipliant l'arc $BC = q$ à droite et à gauche par l'arc $AB = p$ et son inverse $AB_1 = p^{-1}$. Cette double multiplication n'altère donc pas la grandeur de l'angle du quaternion q puisque l'arc C_1B_1 est égal en grandeur à l'arc BC; elle change seulement la position de l'arc primitif BC du quaternion q en lui donnant la même inclinaison par rapport à l'arc du quaternion p, mais en transportant le point B sur cet arc à une distance égale au double de la longueur BA de l'arc du quaternion p.

44. On arrive aussi au même résultat en faisant la multiplication par la règle du n° 42. Soient en effet ABC et AB_1C deux triangles sphériques

symétriques par rapport au côté AC commun, et désignons par p et q les quaternions représentés par les angles extérieurs CAB et ABC du premier triangle, le produit pq sera représenté aussi par l'angle extérieur ACB, et par suite aussi par l'angle B_1CA qui peut lui être substitué; or la multiplication de ce dernier angle par p^{-1} ou par l'angle extérieur CAB_1 donne l'angle CB_1A extérieur au second triangle AB_1C, c'est-à-dire un angle égal en grandeur à l'angle de q, et dont le sommet B_1 s'est déplacé en tournant autour du pôle A par une rotation de même sens que l'angle de p et égale au double de cet angle. Le résultat auquel nous sommes ainsi conduit pour l'interprétation géométrique du produit

$$pqp^{-1}$$

concorde d'ailleurs évidemment avec celui du numéro précédent.

45. Il devient maintenant facile, d'après nos notations, de représenter symboliquement la position que prendrait un corps déterminé B, après une rotation de grandeur connue, autour d'un axe fixe passant par un ses points. Pour cela désignons par p un quaternion-unité correspondant à l'axe de rotation et ayant pour angle la moitié de celui qui indique la grandeur de la rotation du corps. On aura en désignant par (B_1) les diverses positions des vecteurs menés aux différents points du corps par le point fixe, et par (B) les positions primitives de ces vecteurs avant la rotation

$$(B_1) = p(B)p^{-1}.$$

On exprimerait de même symboliquement la position du même corps, après plusieurs rotations successives autour d'axes donnés et passant par le même point, en formant les divers quaternions $p, q\ldots$ et r correspondant à ces rotations, et l'on aurait

$$[B_1] = r\ldots\ldots q\,.\,p[B]p^{-1}q^{-1}\ldots\ldots r^{-1}.$$

Cette formule peut encore être mise sous la forme suivante :

$$[B_1] = r^{\frac{1}{2}}\ldots\ldots q^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}[B]p^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}\ldots\ldots r^{-\frac{1}{2}},$$

$p, q\ldots r$ désignant maintenant les quaternions qui déterminent successivement les axes et les angles de rotation.

46. Il résulte de là qu'on peut composer autant de rotations successives qu'on voudra en une seule, car d'après un théorème démontré (n° 12), on a

$$K(r.....qp) = KpKq.....Kr;$$

d'où l'on déduit

$$(r.....qp)^{-1} = p^{-1}q^{-1}.....r^{-1},$$

donc si l'on pose

$$r..... qp = s,$$

on aura

$$r..... qp[B]p^{-1}q^{-1} ..... r^{-1} = s[B]s^{-1},$$

et par suite la première formule de l'article précédent devient

$$[B_1] = s[B]s^{-1}.$$

La seconde formule de cet article est susceptible de la même transformation. En posant

$$s^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}} ..... q^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}},$$

Elle devient

$$[B_1] = s^{\frac{1}{2}} [B] s^{-\frac{1}{2}}.$$

Ce qui démontre la proposition énoncée.

47. On peut encore obtenir autrement les diverses rotations successives dont il est ici question. Soient A, B, C, D,... H, K les divers sommets d'un polygone sphérique quelconque tracé sur une sphère fixe de rayon égal à l'unité, qui aurait pour centre le point O du corps considéré. Supposons que la première rotation imprimée à ce corps ait pour effet d'amener en B, par le chemin AB, le point du corps qui coïncidait primitivement avec le point A de la sphère fixe, et que les autres rotations fassent successivement décrire au même point les arcs BC, CD,... HK. Lorsque toutes ces rotations auront été effectuées le point du corps qui coïncidait primitivement avec A se sera transporté en K, donc on peut remplacer toutes les rotations précédentes par deux autres : l'une qui aurait pour effet de déplacer le corps suivant l'arc AK, et l'autre de le faire ensuite tourner autour de l'axe OK. Pour déterminer la grandeur de cette dernière rotation, considérons la droite liée invariablement au corps qui

avait primitivement la position de la tangente à l'arc AK, menée au point A. Cette ligne se déplacerait par les diverses rotations effectuées suivant les arcs AB, BC... et HK, et il est visible qu'on pourrait l'amener à devenir successivement tangente à tous ces arcs en faisant effectuer au corps, autour des rayons oA, oB,... oH et oK, des rotations respectivement égales aux suppléments des angles du polygone sphérique, et dans le sens même du périmètre de ce polygone. De cette manière lorsque le corps sera arrivé à sa dernière position, la droite tangente primitivement à l'arc AK sera redevenue tangente au même arc en K. Or on peut supprimer toutes les rotations autour des axes oA, oB,... oH et oK, au moyen d'une dernière rotation autour de oK égale à la somme des suppléments des angles du polygone et de sens contraire à la précédente. Si l'on change le sens de cette rotation en retranchant la somme précédente de 2π, on obtient le théorème suivant :

Lorsqu'un corps quelconque ayant un point fixe placé au centre d'une sphère immobile de rayon égal à l'unité, est déplacé successivement au moyen de diverses rotations effectuées suivant les divers arcs de grand cercle AB, BC... HK d'une ligne polygonale ABCD... HK donnée, on peut toujours faire passer le corps de sa première à sa dernière position par une rotation suivant l'arc de grand cercle AK qui ferme la ligne précédente, suivie d'une seconde rotation dans le sens avec lequel on parcourt le périmètre AB... KA et dont la grandeur est égale à l'angle qui représente la surface du polygone sphérique formé.

On sait, en effet que cet angle a précisément pour valeur

$$2\pi - (\pi - A) - (\pi - B) \ldots\ldots - (\pi - H) - (\pi - K).$$

A, B,... H et K désignant les divers angles du polygone sphérique considéré.

Remarquons que si les sommets A et K du polygone venaient à coïncider, la première rotation deviendrait nulle et la seconde serait encore égale à la surface du polygone ABC... H.

Le théorème précédent paraît avoir été découvert par M. Hamilton, qui y a été conduit par la théorie des quaternions. On voit, par ce qui précède, qu'on peut aussi le démontrer par un raisonnement géométrique fondé sur des considérations tout élémentaires.

48. Revenons maintenant à l'analyse symbolique, et soient $p, q, \ldots s$ et t les quaternions représentés par les divers côtés AB, BC,... HK, KA du polygone sphérique précédent. La règle de la multiplication donnée (n° 41) fournira facilement l'arc qui correspond au produit

$$p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots s^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}.$$

On voit donc d'après le théorème précédent combiné avec celui du n° 44, que cet arc aura pour pôle le point A, et en second lieu, que sa longueur sera égale à la moitié de l'aire du polygone AB... HK (divisée, bien entendu, pour rétablir l'homogénéité par le rayon de la sphère égal à l'unité de longueur).

De là résulte immédiatement une construction bien connue et attribuée, je crois, à Gudermann, de l'arc qui représente l'aire d'un triangle sphérique, ou de ce qu'on appelle aussi l'*excès sphérique*. Mais le théorème précédent donne la construction générale pour un polygone sphérique quelconque.

49. La multiplication appliquée au cas important où les facteurs sont des vecteurs en nombre quelconque donne lieu à un grand nombre de conséquences géométriques très-utiles dans le calcul actuel. Examinons en premier lieu le cas de la multiplication de trois vecteurs, et supposons d'abord que ces vecteurs soient perpendiculaires à une même direction ou, ce qui revient au même, soient situés dans un même plan. Comme l'origine de chaque vecteur est arbitraire, puisqu'on ne change pas la valeur d'un vecteur, quand on le déplace parallèlement à lui-même, imaginons qu'on construise un triangle dont les côtés aient précisément la direction des vecteurs donnés. Soit ABC ce triangle, le produit qu'il s'agit d'obtenir dépendra de la valeur du suivant

$$\mathrm{U}(\mathrm{AB}\,.\,\mathrm{BC}\,.\,\mathrm{CA}).$$

Or, si l'on mène au point A la tangente AT au cercle circonscrit au triangle ABC, faisant avec AB un angle égal à BCA, on aura

$$\mathrm{U}\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CA}} = \mathrm{U}\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AT}},$$

et par suite

$$U(BC.CA) = U(BA.AT),$$

ainsi que

$$U(AB.BC.CA) = U(AT),$$

puisque

$$U(AB.BA) = 1.$$

On voit donc que la direction de la tangente AT donne l'unité du quaternion correspondant au produit cherché. Par suite ce quaternion se réduit à un vecteur qui aurait pour direction AT et pour longueur le produit numérique de celles des trois vecteurs donnés.

50. On peut interpréter d'une façon aussi simple le produit d'un nombre quelconque de vecteurs tous situés dans un même plan. Pour cela, remarquons d'abord que ce produit se réduit toujours ou à un vecteur, situé dans le même plan que les premiers, ou à un quaternion dont l'axe ne peut être que nul ou perpendiculaire au plan des vecteurs. En effet, la multiplication de deux vecteurs donne toujours un quaternion dont l'axe est perpendiculaire à leur plan, et d'un autre côté la multiplication d'un quaternion par un vecteur perpendiculaire à son axe donne simplement un vecteur perpendiculaire au même axe, puisque le produit de deux vecteurs perpendiculaires (n° 38) se réduit à un vecteur.

Supposons maintenant que les vecteurs donnés soient parallèles aux n côtés d'un polygone ABC... KL, inscrit dans un cercle, et menons par le sommet A de ce polygone la tangente AT à ce cercle; on aura

$$U(AB.BC.CD\ldots\ldots KL.LA) = U(AB.BC.CA)\,U(AC.CD.DA) \\ \ldots\ldots \times U(AK.KL.LA).$$

Or chacun des produits tels que

$$U(AB.BC.CA)$$

équivaut à (n° 49)

$$U(AT);$$

donc

$$U(AB.BC.CD\ldots\ldots KL.LA) = (UAT)^n.$$

Suivant que n sera un nombre pair ou impair, le second membre se réduira à ± 1, ou à $\pm$UAT. Par suite le produit des vecteurs donnés sera algébrique ou symbolique, selon que le nombre de ces vecteurs sera pair ou impair, et dans le dernier cas, ce produit équivaudra à un vecteur dirigé parallèlement à la tangente AT. Le module du produit sera d'ailleurs égal au produit numérique des longueurs de tous les facteurs, et l'on reconnaîtra par lequel des signes + ou — il faudra multiplier le produit, suivant la valeur de l'entier n et la manière dont les sommets BC....KL du polygone seront disposés par rapport aux diverses diagonales et à la direction AT choisie pour la tangente.

51. Supposons que les vecteurs donnés comme facteurs ne soient plus situés dans un même plan, mais qu'ils soient encore parallèles aux divers côtés d'un polygone gauche quelconque inscrit dans une sphère donnée ; on montrerait de même, par la décomposition de ce polygone en triangles, que le produit de tous les vecteurs, qui est égal, à un facteur numérique près, à celui des côtés du polygone, sera un quaternion dont l'axe serait dirigé suivant le rayon Ao de la sphère, ou bien un vecteur parallèle à la tangente AT menée à la même sphère, suivant que le nombre des facteurs sera pair ou impair.

52. Il est par suite aisé de reconnaître, par le calcul symbolique actuel, si un point donné M est ou n'est pas sur la surface de la sphère qui passe par quatre autres points A, B, C et D dont la position est connue. Soient en effet α, β, γ les vecteurs représentés par les droites AB, BC, CD et μ, ν les deux vecteurs DM, MA. La condition nécessaire et suffisante pour que le point M soit sur la sphère circonscrite au quadrilatère ABCD sera exprimée par l'équation

$$\alpha\beta\gamma\mu\nu = \nu\mu\gamma\beta\alpha,$$

qui équivaut à la condition que l'un et l'autre de ces deux produits soit un vecteur, car chacun d'eux étant égal au conjugué de l'autre multiplié par -1, il faut que leurs parties algébriques soient nulles.

Si l'on pose

$$\alpha\beta\gamma\delta = p,$$

en désignant par δ le vectenr DA, l'équation précédente peut être mise sous cette forme qu'on obtient d'ailleurs directement

$$Sp\delta\mu\nu = 0.$$

or p est un quaternion dont l'axe est dirigé suivant le rayon Ao de la sphère circonscrite au quadrilatère ABCD et $\delta\mu\nu$ est un vecteur tangent en A (n° 49) au cercle AMD, la condition précédente revient donc à exprimer que ce vecteur est perpendiculaire à Ao, ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que le point M soit sur la sphère de centre o, circonscrite au quadrilatère ABCD.

Il serait aussi facile, en partant de là, de trouver en coordonnées ordinaires l'équation de la sphère précédente, ainsi que celle du plan tangent à cette sphère mené par le point A. Il suffirait pour arriver à cette dernière équation de faire dans les précédents $\mu = \delta$ et de considérer ν comme un vecteur quelconque situé dans le plan tangent.

53. Occupons-nous maintenant d'établir quelques identités importantes auxquelles donne lieu la considération des produits de plusieurs vecteurs.

Soient d'abord α, β, γ trois vecteurs ayant une même origine ; leur produit donnera un quaternion composé en général de deux parties, qui sont susceptibles d'être exprimées par des formules simples et d'un usage fréquent.

On aura en premier lieu

$$V\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\alpha\gamma + \gamma S\alpha\beta,$$

qui revient aussi à celle-ci

$$V\alpha V\beta\gamma = V(V\gamma\beta \, . \, \alpha) = \gamma S\alpha\beta - \beta S\gamma\alpha,$$

Or, pour établir cette dernière formule, il suffit de remarquer qu'on a (6)

$$V(\alpha V\beta\gamma) = \frac{1}{2}(\alpha V\beta\gamma - V\beta\gamma \, . \, \alpha) = \frac{1}{2}(\alpha\beta\gamma - \beta\gamma\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha\beta + \beta\alpha)\gamma - \frac{1}{2}\beta(\alpha\gamma + \gamma\alpha),$$

et par suite

$$V \, . \, \alpha V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\alpha\gamma.$$

On peut encore démontrer directement la première des identités précédentes en faisant cette suite de transformations.

On a

$$V\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha\beta\gamma + \gamma\beta\alpha);$$

car

$$\alpha\beta\gamma + \gamma\beta\alpha = 2\alpha S\beta\gamma + \alpha V\beta\gamma - V\beta\gamma . \alpha = 2\alpha S\beta\gamma + 2V\alpha V\beta\gamma = 2V\alpha\beta\gamma,$$

or

$$\frac{1}{2}(\alpha\beta\gamma + \gamma\beta\alpha) = \frac{1}{2}\alpha(\beta\gamma + \gamma\beta) - \frac{1}{2}(\alpha\gamma + \gamma\alpha)\beta + \frac{1}{2}\gamma(\alpha\beta + \beta\alpha);$$

donc

$$V\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\alpha\gamma + \gamma S\alpha\beta.$$

On voit par suite que la partie symbolique du produit de trois vecteurs ne change pas, quand on permute entre eux les facteurs extrêmes, et qu'on a toujours

$$V\alpha\beta\gamma = V\gamma\beta\alpha.$$

On déduirait encore facilement de la même identité les suivantes, qu'il est utile de remarquer

$$V\alpha\beta\gamma + V\gamma\alpha\beta = 2\gamma S\alpha\beta$$
$$V\alpha\beta\gamma + V\beta\gamma\alpha = 2\alpha S\beta\gamma$$
$$V\alpha\beta\gamma + V\beta\gamma\alpha + V\gamma\alpha\beta = \alpha S\beta\gamma + \beta S\alpha\gamma + \gamma S\alpha\beta.$$

54. Les formules précédentes subsistent évidemment lorsque les vecteurs α, β et γ sont dans un même plan. On aura donc dans ce cas

$$\alpha V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\alpha\gamma.$$

Si l'on désigne par A, B et C les angles que font ces vecteurs avec une droite quelconque tracée dans leur plan, cette identité donnera les deux suivantes :

$$\sin A \sin(B - C) = \cos C \cos(A - B) - \cos B \cos(C - A)$$
$$-\cos A \sin(B - C) = \sin C \cos(A - B) - \sin B \cos(C - A).$$

Ces formules se transforment en deux autres, en changeant B et C en $\frac{\pi}{2} + B$ et $\frac{\pi}{2} + C$; ce sont

$$\sin A \sin(B-C) + \sin B \sin(C-A) + \sin C \sin(A-B) = 0$$
$$\cos A \sin(B-C) + \cos B \sin(C-A) + \cos C \sin(A-B) = 0,$$

et comme l'origine des arcs est arbitraire, on peut diminuer dans ces formules tous les angles de l'angle D, ce qui donne

$$\sin(A-D)\sin(B-C) + \sin(B-D)\sin(C-A) + \sin(C-D)\sin(A-B) = 0$$
$$\cos(A-D)\sin(B-C) + \cos(B-D)\sin(C-A) + \cos(C-D)\sin(A-B) = 0.$$

Toutes ces identités bien connues sont, comme on voit, des conséquences immédiates de cette première

$$\alpha V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\alpha\gamma.$$

55. La partie algébrique du produit précédent $\alpha\beta\gamma$ est susceptible d'une interprétation géométrique remarquable; elle exprime en effet le volume du parallélipipède qui aurait ses arêtes parallèles aux vecteurs α, β et γ, ou encore, ce qui revient au même, le sextuple de celui de la pyramide triangulaire qui aurait ses arêtes parallèles aux mêmes vecteurs. Cette proposition devient évidente si l'on remarque que la base du parallélipipède précédent comprise entre les vecteurs β et γ, a pour expression

$$TV\beta\gamma$$

et que la hauteur correspondant à cette base est

$$S\alpha UV\beta\gamma.$$

Le volume du parallélipipède est donc

$$S\alpha\beta\gamma.$$

Ce volume est d'ailleurs susceptible d'avoir un signe selon l'ordre dans lequel sont disposés les facteurs, car on a évidemment

$$S\alpha\beta\gamma = -S\alpha\gamma\beta,$$

puisque

$$V\beta\gamma = -V\gamma\beta,$$

on aura en général

$$S\alpha\beta\gamma = S\beta\gamma\alpha = S\gamma\alpha\beta \quad \text{et} \quad S\gamma\beta\alpha = S\beta\alpha\gamma = S\alpha\gamma\beta = -S\alpha\beta\gamma.$$

56. On démontrerait, à l'aide de considérations géométriques élémentaires, que le volume $S\alpha\beta\gamma$ est aussi équivalent au sextuple de celui du tétraèdre qui aurait trois quelconques de ses arêtes parallèles aux mêmes vecteurs α, β et γ. Remarquons aussi que la même expression est égale au produit de la plus courte distance de deux arêtes opposées du tétraèdre précédent multipliées par l'aire du parallélogramme construit avec les mêmes arêtes. Ainsi soient α et β deux arêtes opposées d'un tétraèdre et γ l'une des arêtes qui les joint, en appelant d la longueur de la plus courte distance des arêtes α et β, on aura

$$d \times TV\alpha\beta = S\alpha\beta\gamma.$$

Cela résulte en effet de ce qu'on a immédiatement

$$d = S\gamma UV\alpha\beta.$$

Cette expression très-simple de la distance de deux droites, coïncide d'ailleurs avec celle qu'on emploie ordinairement dans la géométrie analytique.

57. On voit facilement, d'après ce qui précède, quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le produit agébrique

$$S\alpha\beta\gamma,$$

devienne nul, lorsque les vecteurs sont eux-mêmes finis. Cette condition est que les vecteurs soient tous parallèles à un même plan. A l'aide de cette remarque on peut souvent simplifier les produits algébriques de trois sommes de vecteurs qui auraient des parties communes.

Ainsi l'on aurait identiquement

$$S\alpha(\beta + \delta)(\alpha + \beta + \delta + \gamma) = S\alpha\beta\gamma + S\alpha\delta\gamma = S\alpha(\beta + \delta)\gamma,$$

et en général

$$S\alpha(a\alpha + b\beta)(c\alpha + d\beta + e\gamma) = beS\alpha\beta\gamma,$$

a, b, c, d et e désignant des quantités numériques quelconques

58. Si l'on exprimait sous la forme symbolique normale ordinaire les trois vecteurs α, β, γ et qu'on eût, par exemple

$$\begin{aligned} \alpha &= ai + bj + ck \\ \beta &= a'i + b'j + c'k \\ \gamma &= a''i + b''j + c''k, \end{aligned}$$

on tronverait, en effectuant les calculs nécessaires

$$\begin{aligned} -V\alpha\beta\gamma = i & \left\{ a(a'a'' + b'b'' + c'c'') - a'(aa'' + bb'' + cc'') + a''(aa' + bb' + cc') \right\} \\ + j & \left\{ b(a'a'' + b'b'' + c'c'') - b'(aa'' + bb'' + cc'') + b''(aa' + bb' + cc' \right\} \\ + k & \left\{ c(a'a'' + b'b'' + c'c'') - c'(aa'' + bb'' + cc'') + c''(aa' + bb' + cc' \right\} \end{aligned}$$

et

$$-S\alpha\beta\gamma = a(b'c'' - c'b'') - b(c'a'' - a'c'') + c(a'b'' - b'a''),$$

la première de ces denx équations démontre la formnle

$$V\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\alpha\gamma + \gamma S\alpha\beta,$$

et la seconde donne l'expression connne dn volnme d'nn parallélipipède en fonctions des projections de ses côtés sur trois axes rectangnlaires quelconques. Nons retrouvons ainsi, comme vérification, quelqnes-uns des résultats précédents.

59. Étudions maintenant le prodnit des parties symboliqnes de deux quaternions obtenus chacnn par la multiplication de deux vectenrs. On fera usage, pour obtenir ce produit, des formnles snivantes, d'nne grande importance dans le calcul actuel

$$\begin{aligned} V(V\alpha\beta V\gamma\delta) &= \alpha S\beta\gamma\delta - \beta S\alpha\gamma\delta = \delta S\alpha\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta\delta \\ S(V\alpha\beta V\gamma\delta) &= S\alpha\delta S\beta\gamma - S\alpha\gamma S\beta\delta. \end{aligned}$$

La première de ces formules se dédnit immédiatement de la seconde de celles dn n° 53. En effet, on a

$$V(\lambda V\gamma\delta) = \delta S\lambda\gamma - \gamma S\lambda\delta.$$

λ étant nn vectenr qnelconqne, faisons dans cette formule $\lambda = V\alpha\beta$, il viendra

$$V(V\alpha\beta . V\gamma\delta) = \delta S\alpha\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta\delta,$$

On déduirait de même de la formnle

$$V(\mu V\beta\alpha) = \alpha S\mu\beta - \beta S\mu\alpha.$$

En remplaçant le vecteur arbitraire μ par $V\gamma\delta$, celle-ci :

$$V(V\gamma\delta . V\beta\alpha) = V(V\alpha\beta . V\gamma\delta) = \alpha S\gamma\delta\beta - \beta S\gamma\delta\alpha = \alpha S\beta\gamma\delta - \beta S\alpha\gamma\delta.$$

On pourrait encore établir la même formule au moyen des deux suivantes :

$$V(\alpha\beta V\gamma\delta) = \alpha S\beta\gamma\delta - \beta S\alpha\gamma\delta + V\gamma\delta S\alpha\beta$$
$$V(\alpha\beta V\gamma\delta) = V\gamma\delta S\alpha\beta + V(V\alpha\beta . V\gamma\delta),$$

d'où on tire immédiatement

$$V(V\alpha\beta . V\gamma\delta) = \alpha S\beta\gamma\delta - \beta S\alpha\gamma\delta,$$

et par une simple permutation de lettres, on obtiendrait encore

$$V(V\alpha\beta V\gamma\delta) = \delta S\alpha\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta\delta.$$

60. Si l'on supposait dans cette formnle que l'un des denx premiers vecteurs, α ou β, fût égal à l'un des deux autres, β ou γ, le second membre se simplifierait et se réduirait à un seul terme. Ainsi on anrait en posant, par exemple, $\alpha = \delta$,

$$V\,(V\alpha\beta V\gamma\alpha) = \alpha S\alpha\beta\gamma$$

on aurait de même

$$V(V\alpha\beta V\alpha\gamma) = - \alpha S\alpha\beta\gamma.$$

61. Ponr établir la seconde formule relative au prodnit algébrique des vecteurs précédents, nous remarquerons qu'on a

$$S\alpha\beta\gamma\delta = S\alpha\beta S\gamma\delta + S(V\alpha\beta V\gamma\delta),$$

or, par un autre développement du même produit, on aura

$$S\alpha\beta\gamma\delta = S\alpha V\beta\gamma\delta = S\alpha(\beta S\gamma\delta - \gamma S\beta\delta + \delta S\beta\gamma)$$
$$= S\alpha\beta . S\gamma\delta - S\alpha\gamma . S\beta\gamma + S\alpha\delta . S\beta\gamma.$$

On conclura donc de ces denx identités la snivante, qui est celle qu'il s'agit d'établir :

$$S(V\alpha\beta V\gamma\delta) = S\alpha\delta . S\beta\gamma - S\alpha\gamma . S\beta\delta.$$

Le second membre de cette formnle se réduit à un seul terme, lorsque l'un

des vecteurs, α ou β, est perpendiculaire à l'un des deux autres, γ ou δ. Ainsi, si α était perpendiculaire à γ, ou à δ, on aurait

$$S(V\alpha\beta V\gamma\delta) = S\alpha\delta . S\beta\gamma$$

ou

$$= - S\alpha\gamma . S\beta\delta,$$

et la même réduction aurait lieu si β était perpendiculaire à δ ou à γ.

62. L'identité précédente n'est autre chose que la traduction de ce théorème de trigonométrie énoncé par Gauss, au commencement de son célèbre mémoire sur les surfaces : si ABCD est un quadrilatère sphérique formé par quatre arcs de grand cercle, et que M soit l'angle que font les arcs AB et CD à leur rencontre, on aura

$$\sin AB . \sin CD \cos M = \cos AC \cos BD - \cos AD \cos BC,$$

C'est ce qu'on voit immédiatement en représentant par α, β, γ et δ les rayons de la sphère précédente qui aboutissent respectivement aux sommets A, B, C et D du quadrilatère.

63. On peut déduire encore de la même identité cette autre, qui me paraît curieuse et digne d'être remarquée :

$$S[V\alpha\beta . V\gamma\delta + V\alpha\gamma . V\delta\beta + V\alpha\delta . V\beta\gamma] = 0.$$

En effet, on a, d'après la formule précédente,

$$S(V\alpha\beta . V\gamma\delta) = S\alpha\delta . S\beta\gamma - S\alpha\gamma . S\beta\delta$$
$$S(V\alpha\gamma . V\delta\beta) = S\alpha\beta . S\gamma\delta - S\alpha\delta . S\gamma\beta$$
$$S(V\alpha\delta . V\beta\gamma) = S\alpha\gamma . S\delta\beta - S\alpha\beta . S\delta\gamma$$

d'où on déduit, en ajoutant membre à membre ces trois équations, la formule précédente, en remarquant que les six termes de ces seconds membres se détruisent deux à deux dans l'addition.

64. Cette formule peut aussi se traduire par le théorème de trigonométrie suivant : soit ABCD un quadrilatère sphérique formé par quatre arcs de grand cercle quelconque ; désignons par M, N et P les angles que formeraient respectivement par leur intersection

AB et CD, AC et BD et AD avec BC.

on aura toujours identiquement

$$\sin AB . \sin CD \cos M + \sin AC \sin BD \cos N + \sin AD . \sin BC \cos P = 0.$$

Dans le cas où les quatre points A, B, C et D seraient sur un même grand cercle, les angles M, N et P seraient nuls, et on retrouverait ainsi une formule déjà obtenue (54) qu'on peut aussi écrire dans ce cas :

$$\sin AB . \sin CD + \sin AC . \sin BD + \sin AD . \sin BC = 0.$$

En déplacant le point A sur le même cercle à une distance $\frac{\pi}{2}$ de la première, on aurait aussi

$$\cos AB . \sin CD + \cos AC . \sin BD + \cos AD . \sin BC = 0.$$

65. Les théorèmes relatifs à la multiplication des quaternions, exposés aux numéros 41 et 42, conduisent aussi très-facilement aux relations fondamentales de la trigonométrie sphérique. En effet, soient ABC et A'B'C' deux triangles sphériques polaires ; α, β, γ, α', β' et γ' les vecteurs correspondants aux sommets de ces triangles ; désignons aussi, selon l'habitude, par a, b, c, A, B et C les côtés et les angles du premier triangle ABC, les éléments pareils du second triangle seront, comme on sait, $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - a$, $\pi - b$ et $\pi - c$; et soient de plus p, q, r, p', q' et r' les quaternions représentés par les arcs BC, CA, BA, B'C', C'A' et B'A', on aura

$$\begin{aligned}
p &= -\beta\gamma = \cos a - \sin a . \alpha', \\
q &= -\gamma\alpha = \cos b - \sin b . \beta', \\
r &= -\beta\alpha = \cos c + \sin c . \gamma', \\
p' &= -\beta'\gamma' = -\cos A + \sin A . \alpha, \\
b' &= -\gamma'\alpha' = -\cos B + \sin B . \beta, \\
r' &= -\beta'\alpha' = -\cos C - \sin C . \gamma.
\end{aligned}$$

et de plus,

$$r = pq \quad \text{et} \quad r' = p'q'.$$

on aura donc

$$\begin{aligned}
\cos c + \sin c \gamma' = (\cos a - \sin a . \alpha')(\cos b - \sin b . \beta') &= \cos a \cos b + \sin a \sin b S\alpha'\beta'. \\
&\quad - \cos a \sin b . \beta' - \cos b \sin a . \alpha', \\
&\quad + \sin a \sin b V\alpha'\beta', \\
= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C - \cos a \sin b . \beta' &- \cos b \sin a . \alpha' + \\
&\quad + \sin a \sin b V\alpha'\beta',
\end{aligned}$$

et

$$-\cos C - \sin C \,.\, \gamma = (\cos A - \sin A \,.\, \alpha)(\cos B - \sin B \,.\, \beta) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \, S\alpha\beta$$
$$- \cos A \sin B \,.\, \beta - \cos B \sin A \,.\, \alpha + \sin A \sin B \, V\alpha\beta$$
$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c - \cos A \sin B \beta - \cos B \sin A \alpha + \sin A \sin B \, V\alpha\beta.$$

66. On tire de ces dernières équations, en prenant les parties algébriques des deux membres de chacune d'elles,

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$
$$-\cos C = \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c.$$

On aurait de même, en égalant les parties symboliques de la première équation,

$$\sin c \,.\, \gamma' + \cos a \sin b \,.\, \beta' + \cos b \sin a \,.\, \alpha' - \sin a \sin b V\alpha'\beta' = 0,$$

équation qui peut aussi se mettre sous la forme suivante :

$$V\alpha\beta + \cos a V\gamma\alpha + \cos b V\beta\gamma - \sin a \sin b \sin C \,.\, \gamma = 0.$$

Multipliant la première par $S \,.\, V\alpha'\beta'$ et la seconde par $S \,.\, \gamma$, il viendra :

$$\sin c S\alpha'\beta'\gamma' + \sin a \sin b \sin^2 C = 0,$$

et

$$S\alpha\beta\gamma + \sin a \sin b \sin C = 0.$$

On tire de ces deux équations, d'abord

$$\sin a \sin b \sin c \, S\alpha'\beta'\gamma' = -\overline{S\alpha\beta\gamma}^2,$$

qui exprime une relation remarquable entre les volumes des parallélipipèdes construits sur les rayons qui aboutissent aux sommets de chacun des triangles polaires. On obtient ensuite par une simple permutation entre les lettres :

$$-S\alpha\beta\gamma = S\gamma\beta\alpha = \sin a \sin b \sin C = \sin b \sin c \sin A = \sin c \sin a \sin B.$$

ce qui donne les relations très-simples

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{S\gamma\beta\alpha}{\sin a \sin b \sin c} = \frac{S\alpha'\beta'\gamma'}{S\alpha\beta\gamma}.$$

La même équation symbolique

$$\sin c \,.\, \gamma' + \cos a \sin b \,.\, \beta' + \cos b \sin a \,.\, \alpha' = \sin a \sin b V\alpha'\beta'$$

donne aussi, en la multipliant par $S.\alpha'$,

$$\sin c \cos B + \cos a \sin b \cos C - \sin a \cos b = 0,$$

et cette dernière fournit, en divisant tous ses termes par sin b et en remplaçant $\frac{\sin c}{\sin b}$ par $\frac{\sin C}{\sin B}$, l'équation connue

$$\cot b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \cot B.$$

Nous retrouvons ainsi, comme on voit, presque immédiatement, les principales formules de la trigonométrie sphérique.

67. Considérons maintenant trois vecteurs obtenus respectivement chacun par la multiplication de deux autres, et que nous désignerons ainsi :

$$V\alpha\beta \qquad V\beta\gamma \quad \text{et} \quad V\gamma\delta$$

et cherchons à exprimer la partie algébrique de leur produit. On trouvera qu'elle s'obtient à l'aide de la formule suivante :

$$\begin{aligned} S(V\alpha\beta.V\beta\gamma.V\gamma\delta) = S\alpha\delta.\left(\beta^2\gamma^2 - \overline{S\beta\gamma}^2\right) &+ S\beta\gamma(S\alpha\beta S\delta\gamma + S\alpha\gamma S\delta\beta) \\ &- \beta^2.S\alpha\gamma.S\delta\gamma - \gamma^2 S\alpha\beta.S\delta\beta. \end{aligned}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} S(\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta) = \beta^2\gamma^2 S\alpha\delta = S\alpha\beta S\beta\gamma S\gamma\delta &+ S\alpha\beta S(V\beta\gamma.V\gamma\delta) \\ &+ S\varepsilon\gamma S(V\alpha\beta.V\gamma\delta) \\ &+ S\gamma\delta S(V\alpha\beta.V\beta\gamma) + S(V\alpha\beta.V\beta\gamma.V\gamma\delta) \end{aligned}$$

d'où on tire, en appliquant dans le second membre la formule (64),

$$\begin{aligned} S(V\alpha\beta.V\beta\gamma.V\gamma\delta) &= \beta^2\gamma^2 S\alpha\delta - S\alpha\beta.S\beta\gamma.S\gamma\delta - \gamma^2 S\alpha\beta.S\beta\delta - \beta^2 S\gamma\delta.S\alpha\gamma - S\beta\gamma.S\alpha\delta.S\beta\gamma \\ &\quad + S\alpha\beta.S\beta\gamma.S\gamma\delta + S\beta\gamma.S\alpha\gamma.S\beta\delta + S\gamma\delta.S\alpha\beta.S\beta\gamma \\ &= S\alpha\delta.\left(\beta^2\gamma^2 - \overline{S\beta\gamma}^2\right) + S\beta\gamma.(S\alpha\beta.S\delta\gamma + S\alpha\gamma.S\delta\beta) \\ &\quad - \beta^2.S\alpha\gamma.S\delta\gamma - \gamma^2 S\alpha\beta.S\delta\beta, \end{aligned}$$

ce qui est la formule qu'il s'agissait d'obtenir. On voit qu'elle ne renferme dans son développement que six termes et qu'elle est symétrique par rapport à α et à δ, ainsi que par rapport à β et à γ. On aurait donc par exemple

$$S(V\alpha\beta.V\delta\gamma.V\beta\gamma) = S(V\delta\beta.V\alpha\gamma.V\beta\gamma)$$

68. On serait conduit à la même formule en développant le produit suivant

$$S\alpha\beta\gamma \,.\, S\gamma\beta\delta$$

au moyen de la formule

$$S(\alpha\beta\gamma \,.\, \gamma\beta\delta) = \beta^2\gamma^2 S\alpha\delta = S\alpha\beta\gamma \,.\, S\gamma\beta\delta + S(V\alpha\beta\gamma \,.\, V\gamma\beta\delta)$$

qui donne

$$\begin{aligned} S\alpha\beta\gamma \,.\, S\gamma\beta\delta &= \beta^2\gamma^2 S\alpha\delta - S(\alpha S\beta\gamma - \beta S\alpha\gamma + \gamma S\alpha\beta)\ (\gamma S\beta\delta - \beta S\gamma\delta + \delta S\gamma\beta) \\ &= S\alpha\delta \,.\, \left(\beta^2\gamma^2 - \overline{S\beta\gamma}^2\right) + S\beta\gamma \,.\, (S\alpha\beta \,.\, S\delta\gamma + S\alpha\gamma \,.\, S\delta\beta) \\ &\quad - \beta^2 S\alpha\gamma \,.\, S\delta\gamma - \gamma^2 S\alpha\beta \,.\, S\beta\delta. \end{aligned}$$

69. L'égalité des deux formules précédentes donne l'identité remarquable

$$S(V\alpha\beta \,.\, V\beta\gamma \,.\, V\gamma\delta) = S\alpha\beta\gamma \,.\, S\gamma\beta\delta.$$

Si on fait en particulier $\alpha = \delta$, cette dernière devient

$$\begin{aligned} (S\alpha\beta\gamma)^2 &= S(V\alpha\beta \,.\, V\alpha\gamma \,.\, V\gamma\beta) = S(V\alpha\beta \,.\, V\beta\gamma \,.\, S\alpha\gamma) \\ &= \alpha^2\overline{S\beta\gamma}^2 + \beta^2\overline{S\alpha\gamma}^2 + \gamma^2\overline{S\alpha\beta}^2 - 2S\alpha\beta S\beta\gamma S\gamma\alpha - \alpha^2\beta^2\gamma^2. \end{aligned}$$

L'identité

$$\overline{S\alpha\beta\gamma}^2 = - SV\alpha\beta . V\beta\gamma . V\gamma\alpha,$$

se confond d'ailleurs, ainsi qu'il est facile de s'en assnrer, avec l'nne des formules déjà obtenues au n° 66.

70. En désignant par α, β, γ, δ et ε cinq vecteurs quelconques, l'application des formnles précédentes donnera les deux équations

$$S\alpha\delta\varepsilon\, S\beta\delta\varepsilon = S\alpha\beta\left(\overline{S\delta\varepsilon}^2 - \delta^2\varepsilon^2\right) - S\delta\varepsilon\,(S\alpha\delta S\beta\varepsilon + S\varepsilon\alpha S\beta\delta) + \delta^2 S\alpha\varepsilon S\beta\varepsilon + \varepsilon^2 S\alpha\delta S\beta\delta,$$

$$\overline{S\gamma\delta\varepsilon}^2 = \gamma^2\left(\overline{S\delta\varepsilon}^2 - \delta^2\varepsilon^2\right) - 2S\delta\varepsilon S\gamma\delta S\gamma\varepsilon + \delta^2\,\overline{S\gamma\varepsilon}^2 + \varepsilon^2\,\overline{S\gamma\delta}^2,$$

d'où on tire, en retranchant membre à membre la seconde de la première,

$$\begin{aligned} S\alpha\delta\varepsilon\, S\beta\delta\varepsilon - \overline{S\gamma\delta\varepsilon}^2 = {}& (S\alpha\beta - \gamma^2)\left(\overline{S\delta\varepsilon}^2 - \delta^2\varepsilon^2\right) - S\delta\varepsilon\,(S\alpha\delta S\beta\varepsilon + S\alpha\varepsilon\, S\beta\delta - 2S\gamma\delta S\gamma\varepsilon) + \\ & + \delta^2\left(S\alpha\varepsilon\, S\beta\varepsilon - \overline{S\gamma\varepsilon}^2\right) + \varepsilon^2\left(S\alpha\delta S\beta\delta - \overline{S\gamma\delta}^2\right). \end{aligned}$$

Il est ntile de remarquer que tous les termes du second membre de cette formule, que nous aurons à appliquer plus loin, sont du second de-

gré par rapport aux vecteurs α, β et γ, et que ce membre se compose de deux parties; l'une contient en facteur le binôme

$$S\alpha\beta - \gamma^2,$$

et l'autre est formée en combinant deux à deux les produits algébriques

$$S\alpha\delta,\ S\alpha\varepsilon,\ S\beta\delta,\ S\beta\varepsilon,\ S\gamma\delta \text{ et } S\gamma\varepsilon.$$

71. L'expression précédente

$$S\alpha\delta\varepsilon S\beta\delta\varepsilon - \overline{S\gamma\delta\varepsilon}^2$$

est encore susceptible d'être mise sous une autre forme très-simple. En effet, on a (17, 59 et 60)

$$\begin{aligned} V[V(\gamma\delta + \varepsilon\alpha)V(\gamma\varepsilon + \delta\beta)] &= V(V\gamma\delta V\gamma\varepsilon + V\gamma\delta V\delta\beta + V\varepsilon\alpha V\gamma\varepsilon + V\varepsilon\alpha V\delta\beta) \\ &= -\gamma S\gamma\delta\varepsilon - \delta S\gamma\delta\beta + \varepsilon S\alpha\gamma\varepsilon + \varepsilon S\alpha\delta\beta + \alpha S\beta\delta\varepsilon. \end{aligned}$$

d'où on tire, en multipliant membre à membre par $S . V\delta\varepsilon$,

$$S(V\delta\varepsilon V(\gamma\delta + \varepsilon\alpha)V(\gamma\varepsilon + \delta\beta)) = S\alpha\delta\varepsilon S\beta\delta\varepsilon - S\gamma\delta\varepsilon S\gamma\delta\varepsilon.$$

Toutes ces identités, qui correspondent à des théorèmes géométriques remarquables, nous seront utiles dans les applications de cette théorie à l'étude des surfaces qui font l'objet principal de la section suivante :

SECTION TROISIÈME.

DES APPLICATIONS DU CALCUL A LA GÉOMÉTRIE.

72. Nous étudierons dans cette section quelques-unes des propriétés générales des lignes courbes menées dans l'espace d'une manière quelconque, ainsi que quelques points importants de la théorie des surfaces.

Soient x, y et z les coordonnées d'un point variable quelconque rapporté à trois axes coordonnés fixes donnés, nous représenterons ce point par le vecteur ρ, défini par l'équation symbolique

$$\rho = xi + yj + zk.$$

Si l'on suppose que x, y et z soient des fonctions d'une seule variable indépendante t, ρ sera aussi une fonction bien déterminée de la même variable et donnera, par la variation continue de t, tous les points d'une courbe bien déterminée dont cette fonction symbolique servira à faire connaître les diverses propriétés.

La marche à suivre ne s'éloigne pas d'ailleurs de celle de l'analyse ordinaire. Ainsi la corde σ joignant deux points de la courbe définis par les vecteurs ρ et ρ_1 serait exprimée par

$$\sigma = \rho_1 - \rho = (x_1 - x)i + (y_1 - y)j + (z_1 - z)k.$$

73. Par suite, la direction de la tangente au point ρ sera donnée par la formule

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dx}{dt}\,i + \frac{dy}{dt}\,j + \frac{dz}{dt}\,k.$$

La distance de l'origine des coordonnées à cette tangente sera

$$TV\left(\rho U \frac{d\rho}{dt}\right) = \frac{TV\left(\rho \frac{d\rho}{dt}\right)}{T\frac{d\rho}{dt}},$$

de même la projection du vecteur ρ sur cette tangente serait

$$-S\left(\rho U \frac{d\rho}{dt}\right) = \frac{-S\rho \frac{d\rho}{dt}}{T\frac{d\rho}{dt}}.$$

74. Les directions de deux tangentes successives étant

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho', \quad \text{et} \quad \frac{d\rho}{dt} + d\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dt} + \frac{d^2\rho}{dt^2}dt = \rho' + \rho'' dt,$$

la perpendiculaire au plan déterminé par ces deux directions, ou la direction normale au plan osculateur, au point ρ de la courbe sera donnée par l'expression

$$V\rho'(\rho' + \rho'' dt) \quad \text{ou par} \quad dtV\frac{\rho''}{\rho'}.$$

La longueur du dernier vecteur étant évidemment égale au sinus de l'angle des tangentes précédentes, et par conséquent à cet angle lui-même, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, on obtiendra, en divisant ce vecteur par $d\rho$, qui lui est perpendiculaire, la direction du rayon de courbure, et le module du quotient sera égal à l'inverse de ce rayon. Ainsi une longueur égale à l'inverse du rayon de courbure, portée dans un sens contraire à celui de ce rayon, aura pour expression complète, comme il est facile de s'en assurer (nº 29),

$$V\frac{\rho''}{\rho'}\cdot\frac{1}{\rho'} = -\frac{1}{T\rho'}\cdot\frac{dU\rho'}{dt}.$$

La longueur du rayon de courbure portée dans le sens même du rayon serait donc

$$\rho' \overline{V\frac{\rho''}{\rho'}}^{-1} = -T\rho'\left(\frac{dU\rho'}{dt}\right)^{-1},$$

ce qui s'accorde avec la formule connue.

Remarquous que si l'on preuait pour variable indépendaute l'arc de la courbe, compté à partir d'un point donné de cette courbe, ou aurait $T\rho' = 1$, $\rho' = U\rho'$ et $\rho'' = dU\rho'$, et comme $SU\rho' dU\rho' = \frac{1}{2} d(U\rho')^2 = 0$, on voit que ρ'' sera perpendiculaire à ρ'.

Il est utile de remarquer qu'en général ρ étant uu vecteur variable, $dU\rho$ est perpendiculaire à $U\rho$, ce qui résulte immédiatement de la différenciatiou de l'équation $(U\rho)^2 = -1$, qui donne $S(U\rho \,.\, dU\rho) = 0$.

La première des expressions précédentes deviendra douc $-\rho''$, et la secoude, qui doune le rayon de courbure, se réduira aussi à $-\left(\frac{1}{\rho''}\right)$.

75. Pour avoir l'angle infiniment petit de deux plans osculateurs successifs, il suffit de même de considérer les directions des deux perpendiculaires à ces plans

$$V\rho'\rho'' \quad \text{et} \quad V\rho'\rho'' + dV\rho'\rho'' = V\rho'\rho'' + dtV\rho'\rho''',$$

et de déterminer le vecteur-quotient de ces deux lignes. Ou aura pour l'expressiou de ce vecteur

$$dtV\frac{V\rho'\rho'''}{V\rho'\rho''} = \frac{dtV(V\rho'\rho'' \,.\, V\rho'\rho''')}{\overline{TV\rho'\rho''}^2}.$$

Développant le numérateur du second membre suivant la formule du n° 60, il viendra pour l'expression de l'angle cherché, qu'on appelle l'*angle de torsion*, au poiut ρ

$$d\rho\,\frac{S\rho'''\rho''\rho'}{\overline{TV\rho'\rho''}^2}.$$

76. L'angle que nous venons de calculer est donné par uue longueur portée dans la direction de la tangente $d\rho$ à la courbe considérée; si l'on divisait par $d\rho$ la ligue précédente, on obtiendrait un quotient purement numérique, qui est ce qu'on appelle l'inverse du rayon de seconde courbure et dont la valeur est, comme on voit,

$$\frac{S\rho'''\rho''\rho'}{\overline{TV\rho'\rho''}^2}.$$

77. Les directions de deux rayons de courbure successifs seront, d'après ce qui précède (74),

$$\frac{dU\rho'}{dt} \qquad \frac{dU\rho'}{dt} + \frac{d^2U\rho'}{dt^2}dt;$$

l'angle infiniment petit formé par ces deux rayons sera donc donné par

$$dt\mathrm{V}\frac{\frac{d^2U\rho'}{dt^2}}{\frac{dU\rho'}{dt}},$$

cet angle étant porté sur une ligne perpendiculaire au plan mené par les deux rayons de courbure consécutifs.

Mais on peut encore trouver une autre expression du même vecteur en prenant pour direction de ces rayons de courbure (74)

$$\rho'\mathrm{V}\rho''\rho' \quad \text{et} \quad \rho'\mathrm{V}\rho''\rho' + dt\left\{\rho'\mathrm{V}\rho'''\rho' + \rho''\mathrm{V}\rho''\rho'\right\},$$

ce qui donne pour la valeur de l'angle cherché

$$dt\mathrm{V}\left(\frac{\rho'\mathrm{V}\rho'''\rho'}{\rho'\mathrm{V}\rho''\rho'} + \frac{\rho''\mathrm{V}\rho''\rho'}{\rho'\mathrm{V}\rho''\rho'}\right) = dt\left\{\mathrm{V}\frac{\mathrm{V}\rho'''\rho'}{\mathrm{V}\rho''\rho'} + \mathrm{V}\frac{\rho''}{\rho'}\right\}.$$

Or $dt\mathrm{V}\frac{\rho''}{\rho'}$ et $dt\mathrm{V}\frac{\mathrm{V}\rho'''\rho'}{\mathrm{V}\rho''\rho'}$ sont (74 et 75) des longueurs égales aux angles de contingence et de torsion de la courbe portées respectivement, la première sur la normale au plan osculateur, et la seconde sur la direction de la tangente à la courbe. Cette formule, qui donne en même temps l'angle des rayons de courbure et la direction de la perpendiculaire à ces rayons, équivaut à deux théorèmes découverts par Lancret.

78. La formule qui donne la distance de deux droites (56), appliquée au cas où les droites sont infiniment voisines, conduit dans la théorie des courbes et des surfaces à quelques résultats intéressants. Pour en donner un exemple, proposons-nous, comme l'a fait M. Bouquet, de chercher l'ordre infinitésimal de la distance de deux tangentes successives à une courbe donnée. Soit ρ le vecteur d'un point de la courbe, la tangente en

ce point aura pour direction ρ', et celle de la tangente suivante serait $\rho' + \rho'' dt$, et comme la distance $\Delta\rho$ des points de contact peut être mise, par le développement en série, sous la forme

$$\Delta\rho = \rho'\Delta t + \frac{\rho''}{1.2}(\Delta t)^2 + \frac{\rho'''}{1.2.3}(\Delta t)^3 + \text{etc.}$$

On voit qu'il faut absolument tenir compte dans l'expression de $\Delta\rho$ des termes du troisième ordre pour que la distance cherchée

$$\Delta\rho \mathrm{UV}\rho'(\rho' + \rho'' dt) = \Delta\rho \mathrm{UV}\rho'\rho''$$

ne soit pas nulle. Cette distance devient donc, en tenant compte des termes de cet ordre,

$$\frac{(\Delta t)^3}{6}\rho'''\mathrm{UV}\rho'\rho'' = \frac{(\Delta t)^3}{6}\frac{\mathrm{S}\rho'\rho''\rho'''}{\mathrm{TV}\rho'\rho''}.$$

Dans le cas où la distance des tangentes serait partout du quatrième ordre, cette courbe satisferait à l'équation différentielle

$$\mathrm{S}\rho'\rho''\rho''' = 0,$$

laquelle équivaut à

$$\mathrm{V}\frac{\mathrm{V}\rho'\rho'''}{\mathrm{V}\rho'\rho''} = 0.$$

Or (35) le vecteur $\mathrm{V}\rho'\rho'''$ est la fonction dérivée de $\mathrm{V}\rho'\rho''$. Donc on aura par l'intégration (34)

$$\mathrm{UV}\rho'\rho'' = \mathrm{U}\gamma,$$

γ désignant un vecteur constant. Le plan osculateur de la courbe actuelle serait donc constant, par suite la courbe serait plane, et la distance de ses tangentes, rigoureusement nulle.

79. Abordons maintenant quelques points de la théorie des surfaces. Désignons encore par ρ le vecteur d'un point d'une surface, ici ρ sera une fonction de deux variables indépendantes quelconques exprimées ou sous-entendues, que nous désignerons toujours dans ce qui va suivre par les lettres u et v; les diverses valeurs attribuées à ces variables détermineront sur la surface deux systèmes de courbes que nous appellerons (U) et (V), et qui s'obtiendront en faisant varier, pour tracer les courbes de chaque sys-



tème, l'une des variables, l'autre restant constante. Ainsi, dans chacune des courbes (U) la quantité v variera seule, et, au contraire, ce sera la variable u qui seule changera dans chacune des courbes de l'autre système (V). La variation totale $d\rho$ correspondant à un déplacement infiniment petit quelconque du vecteur ρ sera par suite composée de deux parties, et l'on aura

$$d\rho = \left(\frac{d\rho}{du}\right) du + \left(\frac{d\rho}{dv}\right) dv.$$

$\left(\frac{d\rho}{du}\right)$ et $\left(\frac{d\rho}{dv}\right)$ désignant deux vecteurs qui sont les dérivées partielles du vecteur ρ par rapport à chacune des variables indépendantes. En établissant une relation quelconque entre les variables u et v, ρ deviendrait fonction d'une seule variable, et l'extrémité de ρ décrirait alors une courbe assujettie à rester sur la surface. En supposant, par exemple, que v soit une fonction donnée de u, on aurait pour l'élément de la courbe correspondant à cette fonction

$$d\rho = \left\{ \left(\frac{d\rho}{du}\right) + \left(\frac{d\rho}{dv}\right)\left(\frac{dv}{du}\right) \right\} du.$$

Quelle que soit la fonction v et sa dérivée algébrique $\frac{dv}{du}$, il est visible que l'élément $d\rho$ demeurera toujours dans un même plan, perpendiculaire au vecteur

$$V\left(\frac{d\rho}{du}\right)\left(\frac{d\rho}{dv}\right).$$

Ce sera le plan tangent à la surface au point ρ, et le vecteur précédent aura la direction de la normale à la surface au même point.

80. Les diverses courbes qu'on peut tracer d'un même point sur une surface donnée, présentent dans le voisinage de ce point quelques propriétés remarquables, et qui sont maintenant bien connues. Pour les étudier, posons

$$\frac{d\rho}{du} = p, \qquad \frac{d\rho}{dv} = q,$$

$$\frac{d^2\rho}{du^2} = r, \quad \frac{d^2\rho}{du\,dv} = s \quad \text{et} \quad \frac{d^2\rho}{dv^2} = t,$$

p, q, r, s et t étant des vecteurs bien définis et fonctions de u et de v. Pour

obtenir une courbe quelconque de la surface, supposons que u et v soient fonctions d'une même variable, et désignons par u', v', u'' et v''... les dérivées de ces deux fonctions par rapport à cette seule nouvelle variable indépendante, l'inverse du rayon de courbure, ou la courbure de la ligne comptée sur la direction de ce rayon, sera pour la ligne considérée, en faisant pour plus de simplicité l'élément $dt = \mathrm{T}d\rho$

$$\rho'' = pu'' + qv'' + ru'^2 + 2su'v' + tv'^2,$$

Donc la projection de cette *courbure* sur la normale sera

$$\mathrm{S}\nu\rho'' = \mathrm{S}\nu r . u'^2 + 2\mathrm{S}\nu s . u'v' + \mathrm{S}\nu t . v'^2,$$

en posant

$$\nu = \mathrm{U}pq,$$

ν étant la direction de la normale à la surface au point ρ, ce qui donne

$$\mathrm{S}\nu p = \mathrm{S}\nu q = 0.$$

La formule précédente montre que la projection de la courbure sur la normale ne dépend en chaque point que des valeurs de u' et v' ou de la direction de la tangente, d'où l'on conclut facilement, en remplaçant la courbure par l'inverse du rayon de courbure, le théorème connu de Meusnier.

81. L'équation précédente donne aussi le moyen de discuter avec la plus grande facilité les valeurs des diverses courbures, ou, ce qui revient au même, celles des rayons de courbure de la surface, et conduit aux théorèmes bien connus d'Euler que nous ne rappellerons pas ici ; on en déduit encore l'équation des lignes de courbure, en définissant ces lignes par la propriété qu'elles ont de déterminer en chaque point suivant la normale un rayon de courbure maximum ou minimum. En effet, on a

$$d\rho = pdu + qdv \quad \text{ou} \quad \rho' = pu' + qv'.$$

Prenant toujours pour unique variable indépendante la longueur de la courbe, et faisant $\mathrm{T}\rho' = 1$, appelant de plus R le rayon de courbure variable dirigé suivant la normale en chaque point de la courbe, on aura

$$\rho'^2 = p^2u'^2 + 2\mathrm{S}pqu'v' + q^2v'^2 = -1$$

et

$$-S\nu\rho'' = R^{-1} = \frac{S\nu r . u'^2 + 2S\nu s . u'v' + S\nu t . v'^2}{p^2u'^2 + 2Spq . u'v' + q^2v'^2}.$$

Le dénominateur, égal à —1, est mis dans cette dernière formule par raison d'homogénéité. On voit que par ce moyen la valeur de R ne dépend plus que du rapport $\frac{v'}{u'}$ ou $\frac{dv}{du}$; il devient par suite facile de déterminer quelles sont les valeurs de ce rapport qui rendent R maximum ou minimum. On trouve en effet, soit par la différenciation, soit par l'application d'une théorie élémentaire connue, qu'en posant

$$A = S\nu r - p^2 . R^{-1}$$
$$B = S\nu s - Spq . R^{-1}$$
$$C = S\nu t - q^2 . R^{-1}$$

les deux rayons de courbure en chaque point de la surface seront donnés par l'équation du second degré

$$B^2 - AC = 0,$$

et par suite l'équation différentielle de chacune des lignes de courbure sera

$$\frac{dv}{du} = -\frac{B}{C} \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{du} = -\frac{A}{B},$$

l'une et l'autre des deux lignes étant obtenues en remplaçant successivement dans les seconds membres R par ses deux valeurs tirées de l'équation du second degré précédente.

82. On peut aussi trouver l'équation des lignes de courbure en éliminant R^{-1} entre les équations

$$\frac{dv}{du} = -\frac{B}{C} = \frac{Spq . R^{-1} - S\nu s}{S\nu t - q^2 . R^{-1}} \quad \text{et} \quad \frac{dv}{du} = -\frac{A}{B} = \frac{S\nu r - p^2 . R^{-1}}{Spq . R^{-1} - S\nu s}.$$

Ce qui donne, en égalant les deux valeurs de R^{-1} qu'on en tire

$$R^{-1} = \frac{S\nu t . \frac{dv}{du} + S\nu s}{q^2 \frac{dv}{du} + Spq} = \frac{S\nu s \frac{dv}{du} + S\nu r}{Spq \frac{dv}{du} + p^2},$$

d'où l'on déduit l'équation suivante, en remplaçant ν par Vpq :

$$(SpqSpqt - q^2Spqs)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (p^2Spqt - q^2Spqr)\frac{dv}{du} + p^2Spqs - SpqSpqr = 0$$

qu'on peut aussi mettre sous la forme plus symétrique

$$(p^2Spqs - SpqSpqr)u'^2 + (p^2Spqt - q^2Spqr)u'v' + (SpqSpqt - q^2Spqs)v'^2 = 0,$$

ce qui est l'équation générale des lignes de courbure sur une surface quelconque.

83. On peut vérifier facilement au moyen de cette équation que les deux lignes différentes de chaque système qui passent par un même point se coupent toujours à angle droit. En effet, désignons par φ_1 et φ_2 les deux valeurs de $\frac{dv}{du}$ tirées de l'équation précédente pour un point déterminé de la surface et formons l'expression

$$S(p+q\varphi_1)(p+q\varphi_2) = p^2 + Spq(\varphi_1+\varphi_2) + q^2\varphi_1\varphi_2.$$

Remarquons ensuite qu'on a, d'après l'équation précédente,

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q^2S\nu r - p^2S\nu t}{SpqS\nu t - q^2S\nu s}$$

et

$$\varphi_1\varphi_2 = \frac{p^2S\nu s - SpqS\nu r}{SpqS\nu t - q^2S\nu s}.$$

On aura donc

$$S(p+q\varphi_1)(p+q\varphi_2) = \frac{p^2(SpqS\nu t - q^2S\nu s) + Spq(q^2S\nu r - p^2S\nu t) + q^2(p^2S\nu s - SpqS\nu r)}{SpqS\nu t - q^2S\nu s}.$$

Le numérateur du second membre étant identiquement nul, on voit que les deux éléments des lignes de courbure qui passent au point considéré et dont les directions sont respectivement $p+q\varphi_1$ et $p+q\varphi_2$ sont perpendiculaires entre eux.

84. On peut encore mettre l'équation des lignes de courbure sous une autre forme très-simple. En effet, on a

$$S\nu(rdu + sdv)Sq(pdu + qdv) = S\nu(sdu + tdv)Sp(pdu + qdv).$$

Or chacun des membres de cette équation peut se transformer, en remarquant que $pdu + qdv = d\rho$ et que ν est perpendiculaire à p et à q. On a ainsi (n° 61)

$$S\nu(rdu + sdv)Sqd\rho = S\Big(V\nu d\rho \,.\, Vq(rdu + sdv)\Big)$$

et

$$S\nu(sdu + tdv)Spd\rho = S\Big(V\nu d\rho \,.\, Vp(sdu + tdv)\Big).$$

Or on a aussi

$$dVpq = Vp(sdu + tdv) + V(rdu + dv)q = \nu dTVpq + d\nu TVpq.$$

Donc l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$S(V\nu d\rho \,.\, dVpq) = S\nu d\rho d\nu = 0,$$

qui montre que les directions de deux normales consécutives ν et $\nu + d\nu$ sont toujours le long d'une même ligne de courbure, dans un même plan, avec l'élément $d\rho$ de cette ligne, et par suite, se rencontrent toujours.

En partant de cette propriété, qui caractérise les lignes de courbure d'une surface, et par suite de l'équation différentielle précédente qui y correspond, et en refaisant un calcul inverse de celui que nous venons de faire, on retrouvera évidemment tous les résultats que nous avions obtenus tout d'abord.

85. Parmi les applications immédiates qu'on peut faire de l'équation

$$S\nu d\nu d\rho = 0,$$

nous remarquerons ce théorème connu. Si deux surfaces se rencontrent suivant une de leurs lignes de courbure, elles se coupent partout suivant le même angle. En effet, en désignant par ν et ν' les normales aux deux surfaces en l'un de leurs points communs, on aura à la fois

$$S\nu d\nu d\rho = 0 \quad S\nu' d\nu' d\rho = 0.$$

Or, $dU\nu$ situé dans le plan qui contient ν et $\nu + d\nu$, et qui est perpendiculaire à $U\nu$ (31) sera parallèle à $d\rho$, et par suite, perpendiculaire à $U\nu'$, de même $dU\nu'$ sera perpendiculaire à $U\nu$. On a donc

$$SdU\nu U\nu' = 0$$

et

$$SU\nu dU\nu' = 0,$$

et par suite

$$dSU\nu U\nu' = 0,$$

D'où l'on tire, en intégrant,

$$SU\nu U\nu' = \text{constante}.$$

Ce qu'il fallait démontrer. On voit aussi que réciproquement si deux surfaces se coupent suivant un angle constant, et que la ligne d'intersection soit une des lignes de courbure de l'une des surfaces, elle sera aussi une ligne de courbure de l'autre.

86. Reprenons l'équation du nº 81

$$B^2 - AC = 0$$

qui sert à déterminer pour chaque point de la surface les deux rayons de courbure principaux. Désignons par M le produit des inverses de ces rayons; l'équation précédente donnera facilement la valeur de M. On trouve immédiatement en effet

$$M(\overline{Spq}^2 - p^2q^2) = \overline{S\nu s}^2 - S\nu r S\nu t.$$

Or on a

$$\nu = UVpq$$

et

$$\overline{Vpq}^2 = \overline{Spq}^2 - p^2q^2$$

ou

$$\overline{TVpq}^2 = p^2q^2 - \overline{Spq}^2;$$

on aura donc

$$M(p^2q^2 - \overline{Spq}^2)^2 = SpqrSpqt - \overline{Spqs}^2.$$

87. Pour montrer la signification géométrique de l'expression M, dont nous venons de calculer la valeur, nous appellerons, d'après Gauss, mesure de la *courbure de la surface* en un de ses points, le rapport de l'angle solide formé par les parallèles aux diverses normales menées le long d'une courbe infiniment petite enveloppant le point et de l'aire comprise par cette courbe sur la surface; ou encore, ce qui revient au même, si on mène des parallèles à ces normales par le centre d'une sphère de rayon égal à l'unité, nous appellerons *mesure de la courbure au point considéré* la limite du rapport de l'aire formée sur la sphère à celle tracée sur la surface.

D'après cette définition, pour trouver l'expression générale de cette mesure, considérons trois points infiniment voisins de la surface, savoir ceux qui sont définis par les trois vecteurs

$$\rho, \quad \rho + p du, \quad \rho + q dv,$$

les normales correspondant à ces trois points auront respectivement pour direction

$$\mathrm{V}pq, \quad \mathrm{V}(p + r du)\,(q + s du), \quad \mathrm{V}(p + s dv)\,(q + t dv)$$

ou

$$\mathrm{V}pq, \quad \mathrm{V}pq + du\mathrm{V}(ps + rq) \quad \text{et} \quad \mathrm{V}pq + dv\mathrm{V}(pt + sq);$$

l'aire déterminée sur la sphère de rayon égal à l'unité par ces trois directions sera

$$\frac{dudv}{\mathrm{TV}pq^3}\,\mathrm{S}\Big(\mathrm{V}pq\,.\,\mathrm{V}(ps + rq)\,.\,\mathrm{V}(pt + sq)\Big).$$

Or l'aire comprise sur la surface par les trois premiers vecteurs sera

$$dudv\mathrm{TV}pq.$$

Donc le rapport cherché aura pour expression

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{V}pq}^4}\,\mathrm{S}\Big(\mathrm{V}pq\,.\,\mathrm{V}(ps + rq)\,.\,\mathrm{V}(pt + sq)\Big),$$

d'où l'on tire par l'application de la formule (71)

$$\frac{\mathrm{S}[\mathrm{V}pq\,.\,\mathrm{V}(ps + rq)\,.\,\mathrm{V}(pt + sq)]}{\overline{\mathrm{V}pq}^4} = \frac{\mathrm{S}pqr\mathrm{S}pqt - \overline{\mathrm{S}pqs}^2}{\overline{\mathrm{V}pq}^4} = \mathrm{M},$$

en désignant par M, comme précédemment, le produit des inverses des rayons de courbure principaux de la surface au point considéré.

88. Nous venons de trouver deux expressions algébriques de forme différente pour cette même valeur de M dont la signification géométrique est si nette; mais en appliquant la formule du n° 70, on peut encore mettre M sous une nouvelle forme découverte par Gauss et qu'il est utile de considérer. On aura ainsi

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{V}pq}^4\mathrm{M} = \mathrm{S}pqr\mathrm{S}pqt - \overline{\mathrm{S}pqs}^2 &= (s^2 - \mathrm{S}rt)\big(p^2q^2 - \overline{\mathrm{S}pq}^2\big) \\ &- \mathrm{S}pq(\mathrm{S}pr\mathrm{S}qt + \mathrm{S}pt\mathrm{S}qr - 2\mathrm{S}ps\mathrm{S}qs) \\ &- p^2\big(\overline{\mathrm{S}qs}^2 - \mathrm{S}qr\mathrm{S}qt\big) - q^2\big(\overline{\mathrm{S}ps}^2 - \mathrm{S}pr\mathrm{S}pt\big). \end{aligned}$$

Or on a

$$d\rho^2 = (pdu + qdv)^2 = p^2du^2 + 2Spq \, . \, dudv + q^2dv^2,$$

et comme le second membre est un trinome algébrique dont les coefficients s'expriment algébriquement au moyen des variables u et v, posons, avec Gauss,

$$E = -p^2, \quad F = -Spq \quad \text{et} \quad G = -q^2.$$

Tous les produits algébriques qui entrent dans le second membre de l'équation précédente sont exprimables au moyen des dérivées partielles des trois fonctions E, F et G ; en effet, on obtient immédiatement par la différenciation

$$Spr = -\frac{1}{2}\frac{dE}{du} \qquad\qquad Sqt = -\frac{1}{2}\frac{dG}{du}$$

$$(1) \quad Sps = -\frac{1}{2}\frac{dE}{dv} \qquad\qquad (3) \quad Sqs = -\frac{1}{2}\frac{dG}{du}$$

$$(2) \quad Spt = -\frac{dF}{dv} + \frac{1}{2}\frac{dG}{du} \qquad\qquad (4) \quad Sqr = -\frac{dF}{du} + \frac{1}{2}\frac{dE}{dv}.$$

Remarquons qu'on a de plus

$$\frac{ds}{dv} = \frac{dt}{du} = \frac{d^3\rho}{dudv^2}.$$

Différenciant (1) par rapport à v et (2) par rapport à u, il viendra

$$Sp\frac{ds}{dv} + s^2 = -\frac{1}{2}\frac{d^2E}{dv^2},$$

et

$$Sp\frac{dt}{du} + Srt = -\frac{d^2F}{dudv} + \frac{1}{2}\frac{d^2G}{du^2}.$$

On tire de ces deux équations, en les retranchant l'une de l'autre membre à membre,

$$s^2 - Srt = \frac{d^2F}{dudv} - \frac{1}{2}\frac{d^2E}{dv^2} - \frac{1}{2}\frac{d^2G}{du^2}.$$

Si l'on différencie de même (3) par rapport à u et (4) par rapport à v, et qu'on retranche les équations obtenues membre à membre, en observant qu'on a

$$\frac{dr}{dv} = \frac{ds}{du} = \frac{d^3\rho}{dvdu^2},$$

on retombera encore sur la formule précédente. Substituons maintenant dans le second membre de la formule qui donne M, les produits algébriques que nous venons d'exprimer en fonction des dérivées partielles des coefficients de E, F et G, et nous retrouverons la formule suivante de Gauss

$$\begin{aligned}(EG-F^2)^2 M = &\left(\frac{d^2F}{dudv}-\frac{1}{2}\frac{d^2E}{dv^2}-\frac{1}{2}\frac{d^2G}{du^2}\right)(EG-F^2)\\ &+E\left(\left(\frac{1}{2}\frac{dG}{du}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{dG}{dv}\left(\frac{1}{2}\frac{dE}{dv}-\frac{dF}{du}\right)\right)\\ &+G\left(\left(\frac{1}{2}\frac{dE}{dv}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{dE}{du}\left(\frac{1}{2}\frac{dG}{du}-\frac{dF}{dv}\right)\right)\\ &+F\left(\frac{1}{4}\frac{dE}{du}\frac{dG}{dv}+\left(\frac{1}{2}\frac{dE}{dv}-\frac{dF}{du}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{dG}{du}-\frac{dF}{dv}\right)-\frac{1}{2}\frac{dE}{dv}\frac{dG}{du}\right).\end{aligned}$$

89. On déduit immédiatement de cette équation ce remarquable théorème : pour qu'une surface courbe puisse être appliquée complétement sur une autre, il faut que les deux surfaces aient la même mesure de courbure dans les points correspondants.

Comme pour une surface plane, cette mesure est nulle en chaque point, il s'ensuit qu'il faut, pour qu'une surface courbe soit applicable sur un plan, qu'elle ait en chacun de ces points un rayon de courbure principal infini, et par suite, que l'un des systèmes de ses lignes de courbure soit composé de lignes droites.

90. Proposons-nous maintenant de trouver l'équation de la ligne la plus courte qu'on puisse tracer sur une surface donnée entre deux de ses points, ou entre deux lignes données de la même surface, en faisant encore usage, à cet effet, du calcul actuel.

Observons que la longueur s d'une courbe quelconque peut être représentée par la formule

$$s=\int Td\rho.$$

Pour que cette longueur soit minimum, il faudra que la variation δs soit nulle. Or on a, conformément aux règles du calcul des variations,

$$\delta s=\delta\int Td\rho=\int \delta Td\rho.$$

On a de plus (31)

$$\delta Td\rho=-S\delta d\rho\,.\,Ud\rho=-Sd\delta\rho\,.\,Ud\rho\,;$$

la variation précédente deviendra donc, en intégrant par partie,

$$\delta s = \left[S\delta\rho U d\rho\right]_{\rho_1}^{\rho_0} + \int_{\rho_0}^{\rho_1} S\delta\rho . dU d\rho.$$

en désignant par ρ_0 et ρ_1 les limites variables ou constantes entre lesquelles l'intégration doit être effectuée. Cette équation montre que, pour que δs soit nul, il faut qu'aux deux extrémités de la ligne cherchée l'élément $d\rho$ soit perpendiculaire aux lignes données comme limites, et de plus qu'en tous les points de la ligne minimum, $dUd\rho$ soit parallèle à la normale à la surface; et comme $dUd\rho$ a (74) la direction du rayon de courbure de la courbe cherchée, il s'ensuit que cette ligne minimum, qu'on appelle encore ligne *géodésique*, jouit de la propriété caractéristique d'avoir en tous ses points son rayon de courbure dirigé suivant la normale, ou, ce qui revient au même, son plan osculateur normal à la surface.

91. Supposons qu'on ait tracé sur une surface une infinité de lignes géodésiques, très-rapprochées l'une de l'autre, puis qu'on coupe toutes ces lignes par une trajectoire curviligne quelconque. Si on porte sur toutes les géodésiques, à partir de cette trajectoire considérée comme fixe, des longueurs égales et qu'on joigne les extrémités ainsi obtenues, on formera un second système de lignes courbes sur la même surface. Appelons (U) le système formé par les lignes géodésiques et (V) celui qui est formé par les lignes que nous venons de définir; prenons pour variables indépendantes de la surface, la longueur u d'une ligne géodésique du premier système comptée à partir de la ligne fixe, et la variable v, dont les diverses valeurs caractérisent sans ambiguïté chacune des lignes géodésiques du premier système, en sorte que la différentielle partielle $\frac{d\rho}{dv}dv$ détermine toujours l'élément de chaque courbe du second système, compris entre les lignes (v) et ($v+dv$) du premier. D'après la propriété des lignes géodésiques que nous venons de démontrer,



$$\frac{d^2\rho}{du^2}$$

exprimera pour tous les points de la surface une direction parallèle à la normale; on aura de plus

$$\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2 = -1.$$

Ainsi

$$S\frac{d^2\rho}{du^2}\frac{d\rho}{dv}=0,$$

et

$$S\frac{d^2\rho}{dudv}\frac{d\rho}{du}=\frac{1}{2}\frac{d}{dv}\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2=0,$$

par suite on aura

$$\frac{d}{du}S\frac{d\rho}{du}\frac{d\rho}{dv}=S\frac{d^2\rho}{du^2}\frac{d\rho}{dv}+S\frac{d\rho}{du}\frac{d^2\rho}{dudv}=0.$$

et en intégrant, il vient

$$S\frac{d\rho}{du}\frac{d\rho}{dv}=f(v),$$

le second membre étant une fonction de la seule variable v et ne dépendant pas de u; si l'on désigne pas θ l'angle variable que fait une quelconque des lignes du second système avec une même ligne du premier, et par ds l'élément $\frac{d\rho}{dv}dv$ compris entre deux lignes (v) et $v+\partial v$ du premier, comme $\frac{d\rho}{du}=U\frac{d\rho}{du}$, on voit que l'équation précédente revient à la suivante

$$ds\cos\theta=f(v)dv;$$

elle montre que la projection de l'élément ds d'une courbe du second système sur l'une quelconque des lignes du premier entre lesquelles cet élément est compris est toujours le même, quelle que soit la ligne considérée du second système. Par suite, si ces deux lignes du premier système avaient pour origine commune un même point de la trajectoire fixe correspondant à $u=0$, auquel cas, pour cette valeur particulière de u, ds serait nul, le produit $ds.\cos\theta$ serait partout nul, entre les lignes considérées, et par suite toutes les lignes du second système les couperont orthogonalement en tous leurs points; de même si les deux lignes du premier système qui comprennent l'elément ds sont perpendiculaires à la ligne du second qui correspond à $u=0$, auquel cas, pour cette valeur de $u, \theta=\frac{\pi}{2}$, le produit $ds\cos\theta$ sera encore partout nul et toutes les lignes du second système couperont à angle droit celles du premier qui jouiront de la propriété

énoncée. D'où on conclut d'abord un théorème important dû à Gauss que nous énoncerons ainsi : un système de lignes géodésiques tracées sur une surface sera coupé orthogonalement par un autre système de lignes courbes, si toutes les lignes géodésiques passent par un même point de la surface, et que toutes les lignes du second interceptent sur celle du premier des longueurs égales à partir du point où les premières se croisent. Le même théorème a encore lieu si les lignes géodésiques du premier système sont toutes perpendiculaires à une ligne du second, et que toutes les autres lignes de ce dernier système interceptent sur celles du premier des longueurs égales. On voit de plus que si l'on donne un système quelconque de lignes géodésiques sur une surface et qu'on en détermine une seule trajectoire orthogonale, toutes les autres trajectoires orthogonales des mêmes géodésiques intercepteront sur ces lignes, à partir de la première, des longueurs égales. Dans le cas où les géodésiques seraient tangentes successivement à une même courbe quelconque tracée sur la surface, il suffirait, pour obtenir une trajectoire orthogonale de ces tangentes, de former, comme sur le plan, la développante de cette courbe sur la surface, et cette ligne couperait orthogonalement toutes les géodésiques et déterminerait par suite toutes leurs autres trajectoires orthogonales. De là résultent divers moyens de partager une surface par deux systèmes de lignes orthogonales, distinctes des lignes de courbure de la surface, lesquelles jouissent, comme nous l'avons vu (83), de la même propriété.

92. Revenant aux propriétés générales des lignes géodésiques, proposons-nous de trouver sur une surface quelconque l'équation de ces lignes, en supposant que chaque point de cette surface soit déterminé par un système de valeurs attribuées à deux variables indépendantes u et v. Appelons θ l'angle variable que fait une même géodésique avec chaque ligne du premier système (U). Nous aurons en premier lieu, en conservant les notations précédentes,

$$\cos\theta = -\frac{Sp(pdu + qdv)}{Tp(pdu + qdv)},$$

et

$$\sin\theta = \frac{TVp(pdu + qdv)}{Tp(pdu + qdv)} = \frac{TVpq.dv}{Tp(pdu + qdv)};$$

d'où l'on tire en divisant membre à membre les équations

$$(1) \qquad \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot g\,\theta = -\frac{Spq}{TVpq} - \frac{p^2}{TVpq}\frac{du}{dv}.$$

Cette équation fera connaître θ, quand on aura déterminé quelle est la fonction de v qui exprime u dans le cas de la ligne considérée sur la surface. Or on peut trouver une seconde équation différentielle assez simple de la ligne géodésique, en cherchant l'expression de $d\theta$, en fonction de u et de v; et en éliminant θ entre cette nouvelle équation et la précédente, on obtiendrait l'équation cherchée de cette ligne. Voici comment on peut procéder pour obtenir cette équation différentielle.

On a

$$\cos\theta = -SUpUd\rho,$$

et en différenciant

$$\sin\theta d\theta = dSUpUd\rho = SdUp.Ud\rho + SUpdUd\rho.$$

Or, d'après la propriété des lignes géodésiques que nous avons démontrée plus haut (90), $dUd\rho$ ayant la direction de la normale sera perpendiculaire à Up, $SUpdUd\rho$ sera donc nul, et on aura (31)

$$\sin\theta d\theta = SdUp.Ud\rho = \frac{S[Ud\rho.pV(dp.p)]}{Tp^3} = \frac{S[V(Ud\rho.p).V(dp.p)]}{Tp^3}.$$

Or on a

$$V(Up\,Ud\rho) = \frac{\sin\theta}{TVpq}Vpq,$$

donc

$$(2) \quad d\theta = \frac{1}{(Tp)^3}\cdot\frac{1}{TVpq}S(VpqVpdp) = \frac{1}{Tp^3}\cdot\frac{1}{TVpq}\cdot S(Vpq.Vp(rdu+sdv)).$$

93. Cette équation importante aurait pu être immédiatement obtenue, en remarquant qu'on peut considérer l'angle $d\theta$, en négligeant les infiniment petits du second ordre, comme égal à l'angle que font les deux tangentes menées à deux courbes consécutives du premier système (U), par les extrémités d'un élément de la géodésique compris entre elles. En effet, les deux tangentes consécutives à la géodésique étant dans un plan normal à la surface, elles feront toutes deux le même angle avec chacune des lignes (p) ou $(p + dp)$, et les deux angles formés par une même tangente à la

géodésique avec ces deux dernières étant situés dans deux plans tangents à la surface infiniment peu inclinés l'un sur l'autre, la différence de ces deux angles sera égale à l'angle infiniment petit formé par les deux lignes (p) et $(p + dp)$; or ce dernier angle a pour expression

$$\frac{\mathrm{TV}p(p + dp)}{\overline{\mathrm{T}p}^2} = \frac{\mathrm{TV}pdp}{\overline{\mathrm{T}p}^2},$$

et comme le vecteur $\mathrm{V}p \,.\, dp$ fait un angle infiniment petit avec la direction $\mathrm{UV}pq$ de la normale, l'angle précédent équivaudra à

$$\frac{\mathrm{S}(\mathrm{UV}pq \,.\, \mathrm{V}pdp)}{\overline{\mathrm{T}p}^2} = \frac{\mathrm{S}(\mathrm{V}pq \,.\, \mathrm{V}pdp)}{\overline{\mathrm{T}p}^2 \mathrm{TV}pq},$$

ce qui est précisément la valeur de $d\theta$ écrite plus haut (2). Cette expression de $d\theta$ est susceptible d'être transformée en appliquant la formule du n° 61 ; elle devient ainsi

$$d\theta = \frac{1}{\overline{\mathrm{T}p}^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{TV}pq} \left\{ \mathrm{S}pq(\mathrm{S}pr \,.\, du + \mathrm{S}ps \,.\, dv) - p^2(\mathrm{S}qrdu + \mathrm{S}qs \,.\, dv) \right\},$$

et si l'on fait usage des relations établies au n° 88, savoir :

$$\mathrm{E} = -p^2, \quad \mathrm{F} = -\mathrm{S}pq, \quad \mathrm{G} = -q^2,$$

$$\mathrm{TV}pq = \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2},$$

$$\mathrm{S}pr = -\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{E}}{du}, \quad \mathrm{S}ps = -\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{E}}{dv}, \quad \mathrm{S}qs = -\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{du}, \quad \mathrm{S}qr = -\frac{d\mathrm{F}}{du} + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{E}}{dv},$$

la formule (2) deviendra

$$(3) \quad \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} \cdot d\theta = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}\frac{d\mathrm{E}}{du}du + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}\frac{d\mathrm{E}}{dv}dv + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{E}}{dv}du - \frac{d\mathrm{F}}{dv}du - \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{du}dv.$$

94. Cette dernière formule se simplifie notablement quand on emploie pour variables u et v celles qui correspondent à deux systèmes de courbes orthogonales, telles que les lignes de courbure de la surface, ou les géodé-



siques de la surface issues d'un même point, et leurs trajectoires orthogonales. On a alors

$$S\mu q = -F = 0,$$

et l'équation précédente (3) deviendra

$$\sqrt{EG}\,.\,d\theta = \frac{1}{2}\frac{dE}{dv}\,du - \frac{1}{2}\frac{dG}{du}\,dv.$$

Supposons, pour donner une application de cette formule, qu'on ait pour une surface particulière et pour deux systèmes convenables de trajectoires orthogonales

$$E = G = \varphi(u) + \psi(v),$$

φ et ψ étant des fonctions bien déterminées et quelconques, l'équation précédente deviendra

$$(4) \qquad 2Ed\theta = \psi'v\,.\,du - \varphi'u\,.\,dv.$$

On aura de plus, par l'équation (1) du numéro 92,

$$\cot g\,\theta = \frac{du}{dv} \quad \text{ou} \quad \cos\theta\,.\,dv = \sin\theta\,.\,du.$$

Multipliant donc l'équation (4) par $\sin\theta\cos\theta$, et faisant passer tous les termes dans le premier membre, on pourra la mettre sous la forme

$$\varphi u d(\sin\theta^2) + \sin^2\theta\varphi'u\,.\,du - \psi v d(\cos^2\theta) - \cos^2\theta\psi'v dv = 0.$$

Cette dernière donne par une intégration immédiate

$$\sin^2\theta\,.\,\varphi u - \cos^2\theta\,.\,\psi v = \text{const.}$$

On peut de cette manière obtenir une première intégrale de la ligne géodésique de l'ellipsoïde.

93. Dans le cas où nous prendrions pour les deux systèmes de courbes, les géodésiques issues d'un même point de la surface et leurs trajectoires orthogonales, en désignant par u la longueur des géodésiques

comprises entre ce point et une même ligne du second système, on aura $\left(\frac{dp}{du}\right) = p = \mathrm{U}p$, d'où l'on déduit

$$\mathrm{E} = -p^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{d\mathrm{E}}{dv} = 0.$$

Par suite l'équation (3) correspondant à une ligne géodésique quelconque de la surface, deviendra, dans ce système de coordonnées,

$$\sqrt{\mathrm{G}}\,.\,d\theta = -\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{du}\,dv.$$

Posons $\mathrm{T}q = m$, m étant une fonction déterminée de u et de v, on aura

$$\mathrm{G} = m^2 \quad \text{et} \quad \frac{d\mathrm{G}}{du} = 2m\frac{dm}{du},$$

et l'équation précédente se mettra sous la forme très-simple

$$d\theta = -\frac{dm}{du}\,dv.$$

De même la valeur de M, qui mesure la courbure de la surface, et dont l'expression complète se trouve au n° 88, sera donnée, dans le système actuel, par l'équation

$$\mathrm{G}^2\mathrm{M} = \left(\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{du}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{G}}{du^2}\,\mathrm{G},$$

ou encore par la suivante, obtenue en remplaçant dans celle-ci G par m^2, $\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{du}$ par $m\frac{dm}{du}$ et $\frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{G}}{du^2}$ par $\left(\frac{dm}{du}\right)^2 + m\frac{d^2m}{du^2}$,

$$\mathrm{M} = -\frac{1}{m}\frac{d^2m}{du^2}.$$

96. On déduit de là, par la méthode même de Gauss, la *courbure totale* du triangle curviligne ABC formé sur une surface par trois lignes géodésiques quelconques, c'est-à-dire la surface de la figure qui correspond à ce triangle sur la sphère de rayon égal à l'unité. Pour cela, prenons le sommet A pour origine de toutes les lignes géodésiques du premier système (U); supposons que la ligne AB soit la première ligne de ce système, c'est-à-dire celle qui répond à $v = 0$, et que le troisième

sommet C soit pris sur une ligne géodésique (U) quelconque faisant avec la première un angle que nous appellerons A. Les deux autres angles B et C du triangle ABC formés par l'intersection de la ligne géodésique BC avec les deux premières détermineront deux angles analogues à ceux que nous avons désignés précédemment par la lettre θ. Soient θ_0 et θ_1 les valeurs de θ correspondant à ces deux angles, on aura

$$B = \pi - \theta_0 \quad \text{et} \quad C = \theta_1.$$

Cela posé, la courbure totale du triangle ABC sera égale à l'intégrale double

$$\int M d\omega,$$

dans laquelle l'élément $d\omega$ représente la valeur absolue de l'élément de la surface, et M la mesure de la courbure en ce point. Or on a, d'après la formule précédente,

$$M = -\frac{1}{m}\frac{d^2m}{du^2},$$

et, d'autre part,

$$d\omega = T\sqrt{pq}\, du dv = m du dv;$$

l'intégrale à déterminer est donc

$$\int M d\omega = -\int\int \frac{d^2m}{du^2} du dv.$$

Intégrons d'abord par rapport à u, il viendra

$$dv\left(\text{const.} - \frac{dm}{du}\right).$$

Pour déterminer la constante, voyons ce que devient la courbure pour $u = 0$; l'élément de la courbe du second système, lorsque u est très-petit, se confondant avec un élément de cercle, sera égal à

$$u dv,$$

en désignant par v l'angle variable formé par les lignes géodésiques du

premier système avec la première AB, qui sert à définir toutes ces lignes. On aura donc dans le voisinage du point A

$$m = u \quad \text{et} \quad \frac{dm}{du} = 1.$$

Or pour $u = 0$ la courbure devenant nulle quelle que soit la valeur de v, il faut que la constante introduite par l'intégration précédente soit égale à 1.

Ainsi la courbure totale correspondant à la portion de surface comprise entre deux lignes géodésiques infiniment voisines, (v) et $(v + dv)$ sera

$$dv\left(1 - \frac{dm}{du}\right);$$

mais on a, par le numéro 95,

$$d\theta = -\frac{dm}{du}\,dv.$$

L'expression précédente est donc égale à

$$dv + d\theta,$$

et en intégrant depuis $v = 0$ jusqu'à $v = A$, on obtiendra

$$A + \theta_1 - \theta_0 = A + C + B - \pi,$$

c'est-à-dire que l'expression cherchée de la courbure totale du triangle curviligne ABC équivaut à l'aire d'un triangle sphérique dont les côtés feraient entre eux précisément les trois angles A, B, C des lignes géodésiques considérées, ce qui est le beau théorème de Gauss.

97. Nous terminerons cette étude, sans doute bien incomplète, sur les applications géométriques du calcul des quaternions, par la recherche des propriétés de la courbe qui, ayant un périmètre donné, comprend sur une surface une aire maximum.

Soit toujours ρ le vecteur variable du point de la courbe cherchée et $d\rho$ l'élément de cette courbe, et convenons de désigner par $\delta\rho$ l'élément arbitraire suivant lequel chaque point de cette courbe se déplacera sur la surface, lorsqu'on la déformera infiniment peu. Cela posé, la variation de l'aire correspondant à cette déformation aura évidemment pour expression l'intégrale simple

$$\int S\nu d\rho.\delta\rho,$$

dans laquelle à chaque valeur de l'élément $d\rho$ correspond une valeur de $\delta\rho$, et où ν désigne encore la direction variable de la normale à la surface. La variation de la longueur de la courbe sera donnée par celle de l'intégrale

$$\int Td\rho,$$

et sera par suite

$$\int \delta Td\rho = -\int S\delta d\rho Ud\rho = (S\delta\rho Ud\rho) + \int S(dUd\rho.\delta\rho).$$

La condition imposée à la courbe d'être fermée annule évidemment le terme hors du signe $\int$, et l'on aura, en appliquant la règle connue d'Euler,

$$\int S(\nu d\rho + adUd\rho)\delta\rho = 0,$$

en désignant par a une constante particulière. Il faut donc, pour que cette intégrale soit nulle, quelle que soit la loi de la variation $\delta\rho$, que le vecteur

$$V\nu d\rho + adUd\rho$$

soit toujours perpendiculaire à $\delta\rho$, et comme ce dernier élément est toujours placé sur la surface d'une manière quelconque, le vecteur précédent doit être parallèle à la normale ν, ce qui donne immédiatement

$$V(\nu V\nu d\rho + a\nu dUd\rho) = 0,$$

ou, à cause de $\nu^2 = -1$,

$$d\rho = aV\nu dUd\rho,$$

ce qui est l'équation différentielle de la courbe cherchée; elle est susceptible d'être interprétée géométriquement d'une manière bien simple. En effet, $dUd\rho$ exprime la direction du rayon de courbure de la courbe, et en désignant par ds l'élément de cette courbe et par R son rayon de courbure, on a (74)

$$T\left(\frac{dUd\rho}{ds}\right) = \frac{1}{R}.$$

Si donc on appelle θ l'angle que fait le rayon de courbure de la courbe avec le plan tangent, ou, ce qui revient au même, l'angle que fait le plan oscu-

lateur de la courbe avec le plan tangent à la surface, l'équation différentielle précédente donnera, en divisant les deux membres par ds,

$$1 = \frac{a \cos \theta}{R} \quad \text{ou} \quad R = a \cos \theta.$$

On voit donc, par cette dernière équation, que la courbe cherchée jouit de la propriété d'avoir en tous ses points un rayon de courbure proportionnel au cosinus de l'angle θ que font entre eux le plan osculateur de la courbe et le plan tangent à la surface, ce qui revient à dire que si l'on prend sur une perpendiculaire à la tangente à la courbe, menée dans le plan tangent une longueur constante (égale à a), et qu'on décrive une sphère ayant pour rayon cette longueur, elle déterminera par son intersection avec le plan osculateur le cercle osculateur même de la courbe.

98. Remarquons que si l'on désigne par ξ le vecteur variable mené au centre de cette sphère, on aura

$$\xi = \rho + a\mathrm{U}d\rho.\nu;$$

d'où l'on tire en différenciant

$$d\xi = d\rho + a\mathrm{V}(d\mathrm{U}d\rho.\nu) + a\mathrm{V}(\mathrm{U}d\rho.d\nu)$$

et à cause de l'équation différentielle même de la courbe

$$d\rho + a\mathrm{V}(d\mathrm{U}d\rho\nu) = 0,$$

il vient

$$d\xi = a\mathrm{V}(\mathrm{U}d\rho.d\nu).$$

Or $d\nu$ et $\mathrm{U}d\rho$ sont deux vecteurs perpendiculaires à la normale ν, donc $d\xi$ est paralèlle à cette normale. On voit donc que si l'on circonscrit à la surface proposée une surface développable le long de la courbe d'aire maximum et de périmètre donné, et qu'on développe ensuite cette surface sur un plan, les divers centres des sphères précédentes seront amenés à coïncider avec un même point du plan, et la courbe s'appliquera sur un cercle dont le rayon est égal à celui des sphères précédentes ou à la constante a.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Cᵉ, rue Racine, 26.

